풀이

STEP II 2000, 문제 10

역학 • 연결된 도르래 계

STEP II 2000, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

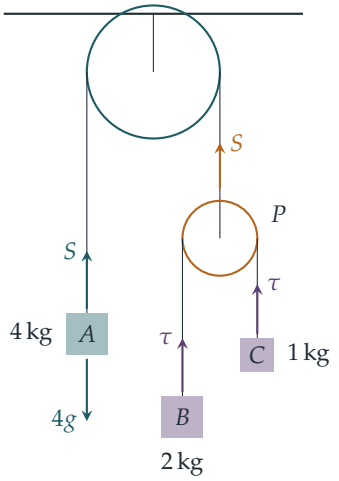
step.maths.org/questions/00-s2-q10

핵심 아이디어

이것은 이중 애트우드 기계(double Atwood machine)이다. A를 붙잡고 있는 동안에는 두 번째 도르래(pulley)가 고정되어 있으므로 B, C는 보통의 애트우드 기계(Atwood machine)를 이룬다. A를 놓으면 두 번째 도르래도 움직이므로, 깔끔하게 접근하려면 B와 C의 운동을 **그 도르래에 대한 상대 운동**(*relative motion*)으로 나타내고, 가벼운 도르래에는 알짜힘이 작용하지 않는다는 사실을 이용하면 된다. 즉 도르래 위쪽 줄은 아래쪽 줄의 장력(tension)의 정확히 두 배로 당긴다.

풀이

입자는 질점(point mass)으로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 두 도르래는 매끄럽고 가벼운 것으로 모형화한다. 두 번째 도르래를 P라 하자. 모든 가속도에 대하여 **아래쪽**을 양의 방향으로 잡고, A를 지나는 줄의 장력을 S, BC 줄의 장력을 τ라 쓰며, g의 단위는 $\mathrm{m\,s^{-2}}$로 한다.



P는 가벼우므로 P에 작용하는 알짜힘(net force)은 0이어야 한다(그렇지 않으면 가속도가 무한대가 된다). P는 위로 S, 아래로 양쪽에서 각각 τ의 힘을 받으므로 항상

$$S = 2\tau$$

이다.

첫 번째 단계: A를 붙잡고 있을 때

A를 정지한 채로 붙잡고 있으면 고정 도르래에 걸린 줄은 움직이지 않으므로 P는 고정되어 있다. 그러면 B와 C는 보통의 애트우드 기계를 이룬다. 즉 B가 아래로 가속도 a로 움직이면 C는 위로 가속도 a로 움직인다. 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)에 의하여

$$2a = 2g - \tau, \qquad 1 \cdot a = \tau - g.$$

두 식을 더하면 $3a = g$이므로

$$a = \tfrac{1}{3}g, \qquad \tau = \tfrac{4}{3}g.$$

따라서 B는 아래쪽으로, C는 위쪽으로 각각 $\frac{1}{3}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$의 가속도로 움직인다.

이 단계가 끝날 때($t = T$) B는 아래로, C는 위로 각각 속력 $\frac{1}{3}gT$로 움직이고 있으며, B는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}g\,T^2 = \frac{1}{6}gT^2$만큼 내려왔다. 이 단계 내내 A와 P는 정지해 있다.

두 번째 단계: 모두 자유롭게 움직일 때

A의 가속도를 a_A(아래쪽)라 하자. 고정 도르래에 걸린 줄의 길이는 일정하므로 P의 가속도는 $-a_A$이다. 즉 P는 A가 내려가는 만큼 빠르게 올라간다.

생각해 보기 B와 C가 매달린 도르래 자체가 가속하고 있을 때, B와 C의 가속도는 어떻게 나타낼까?

P에 대하여 상대적으로 보면 BC 줄은 고정된 애트우드 기계에서와 똑같이 행동한다. 즉 B가 P에 대하여 아래로 가속도 r로 움직이면 C는 P에 대하여 위로 가속도 r로 움직인다. 여기에 P 자신의 가속도를 더하면

$$a_B = -a_A + r, \qquad a_C = -a_A - r.$$

이제 $S = 2\tau$를 이용하여 각 입자에 뉴턴의 제2법칙을 적용한다(아래쪽이 양의 방향).

$$\begin{aligned} A: &\quad 4a_A = 4g - 2\tau, \\ B: &\quad 2(-a_A + r) = 2g - \tau, \\ C: &\quad 1(-a_A - r) = g - \tau. \end{aligned}$$

A의 식에서 $\tau = 2g - 2a_A$이다. 이를 B의 식에 대입하면 $-2a_A + 2r = 2a_A$이므로 $r = 2a_A$이다. 두 결과를 모두 C의 식에 대입하면

$$-3a_A = g - (2g - 2a_A) = -g + 2a_A \quad \Longrightarrow \quad a_A = \tfrac{1}{5}g.$$

따라서 $r = \frac{2}{5}g$, $\tau = \frac{8}{5}g$, $S = \frac{16}{5}g$이고

$$a_A = \tfrac{1}{5}g \text{ (아래쪽)}, \qquad a_B = -\tfrac{1}{5}g + \tfrac{2}{5}g = \tfrac{1}{5}g \text{ (아래쪽)}, \qquad a_C = -\tfrac{1}{5}g - \tfrac{2}{5}g = -\tfrac{3}{5}g,$$

이므로 C는 **위쪽으로** $\frac{3}{5}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$의 가속도로 움직인다.

이 가속도들은 일정하며, A를 놓는 순간 갑자기 변하는 것은 없다. A와 P는 정지 상태에서 출발하고, B, C는 속력 $\frac{1}{3}gT$를 그대로 유지한다.

A의 속력

첫 번째 단계에서 B는 $\frac{1}{6}gT^2$만큼 움직였으므로, 남은 거리는

$$0.6\,gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{3}{5}gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{13}{30}gT^2$$

이다. 두 번째 단계에서 B는 아래쪽 속도 $\frac{1}{3}gT$로 출발하고 아래쪽 가속도가 $\frac{1}{5}g$이므로, 속도가 계속 양수이고 이동 거리는 변위(displacement)와 같다. 이 거리를 가는 데 걸리는 시간을 t라 하면 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$에 의하여

$$\tfrac{1}{3}gT\,t + \tfrac{1}{10}gt^2 = \tfrac{13}{30}gT^2.$$

$t = kT$로 놓고 양변에 $30/(gT^2)$을 곱하면

$$3k^2 + 10k - 13 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (k-1)(3k+13) = 0.$$

$t > 0$이므로 $k = 1$이다. 즉 두 번째 단계는 정확히 T초 동안 지속된다. A는 이 단계를 정지 상태에서 가속도 $\frac{1}{5}g$로 시작했으므로, 이때의 속력은

$$v_A = \tfrac{1}{5}g \cdot T = \tfrac{gT}{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

검산

- 구한 값들로 각 운동 방정식(equation of motion)이 성립한다. A에 대하여 $4 \cdot \frac{1}{5}g = 4g - \frac{16}{5}g$이고, C에 대하여 $-\frac{3}{5}g = g - \frac{8}{5}g$이다.
- 독립적인 검산: 줄에 의하여 $y_C = $ 상수 $- 2y_A - y_B$(아래쪽 위치)가 강제되며, 두 자유 좌표 y_A, y_B를 사용한 에너지 방법으로도 똑같이 $a_A = a_B = \frac{1}{5}g$, $a_C = -\frac{3}{5}g$를 얻는다.
- $g = 9.8$, $T = 1.7$로 운동을 수치적으로 단계별 계산하면, B는 $t = 3.400$(즉 $2T$)일 때 $0.6gT^2$만큼 이동하며, 이때 A의 속력은 $3.332 = gT/5$이다.
- 전체 무게는 $7g$이지만 고정 도르래가 받치는 힘은 $2S = \frac{32}{5}g$뿐으로 $7g$보다 작으므로, 두 번째 단계에서 계의 질량중심(centre of mass)은 당연히 아래쪽으로 가속한다.

흔한 실수

- 두 번째 단계에서도 P를 고정된 것으로 보고 B와 C에 $\pm\frac{1}{3}g$를 그대로 다시 쓰는 것.
- 가벼운 도르래에서 $S = 2\tau$임을 잊거나, 도르래에 질량 항을 넣는 것.
- 이미 이동한 $\frac{1}{6}gT^2$를 빼지 않고 $0.6gT^2$ 전체를 두 번째 단계의 이동 거리로 잡는 것.

STEP 너머

두 번째 검산에서처럼 줄의 구속 조건(constraint)을 자동으로 만족하는 위치 좌표를 고르는 것은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 운동 에너지와 위치 에너지를 자유 좌표로 나타내면 장력은 전혀 등장하지 않은 채 운동 방정식이 따라 나온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 도르래와 같은 구속된 계를 꼼꼼하게 다루므로 다음 단계로 읽기에 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.