풀이

STEP II 2000, 문제 1

순수수학 • 이집트 분수

> **STEP II 2000, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q1

핵심 아이디어

두 예에는 공통된 패턴이 있다. 첫 번째 분모는 N보다 1만큼 크고, 두 번째 분모는 N과 그 수의 곱이다. 유일성(uniqueness)을 보이는 부분에서는 분모를 없애고 "직사각형 완성하기"(completing the rectangle)를 하면 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{N}$이 곱이 N^2인 두 정수에 대한 식으로 바뀐다. 소수(prime)의 제곱은 인수분해(factorisation)하는 방법이 매우 적으므로 a와 b의 후보도 매우 적고, 그래서 이를 그냥 모두 나열하면 된다.

풀이

일반적인 결과

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$과 $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$에서 분모는 $N+1$과 $N(N+1)$이다($6=2\times3$이고 $12=3\times4$이므로). 따라서 다음과 같이 추측할 수 있다.

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}.$$

이를 증명하기 위해 우변을 통분한다.

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}=\frac{N+1}{N(N+1)}=\frac{1}{N}.$$

두 분모는 모두 1보다 큰 정수이므로 두 항은 모두 단위분수(unit fraction)이다. 또한 $N>1$일 때 $N(N+1)>N+1$이므로 두 항은 서로 다르다(distinct). 따라서 모든 단위분수는 서로 다른 두 단위분수의 합으로 나타낼 수 있다.

N이 소수일 때의 유일성

$\frac{1}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$의 양변에 abN을 곱하면 $ab = Nb + Na$, 즉

$$ab - Na - Nb = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ab - Na - Nb + N^2 = N^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-N)(b-N) = N^2.$$

(a, b, N이 0이 아니므로) 각 단계는 거꾸로 되돌릴 수 있으므로 $(*)$의 해는 정확히 $(a-N)(b-N) = N^2$의 해와 같다.

> **생각해 보기** $a - N$과 $b - N$이 둘 다 음수일 수 있을까?

그럴 수 없다. $\frac{1}{b} > 0$이므로 $\frac{1}{a} < \frac{1}{N}$이고, 따라서 $a > N$이다. 마찬가지로 $b > N$이다. 그러므로 $a - N$과 $b - N$은 곱이 N^2인 **양의** 정수이다. (주목할 만한 점이 있다. 이 사실이 없다면 쌍 $(-1, -N^2)$도 배제해야 할 또 하나의 인수분해가 된다.)

이제 $N = p$가 소수라고 하자. p^2의 양의 약수(divisor)는 1, p, p^2뿐이므로 쌍 $(a-p, b-p)$는 다음 중 하나여야 한다.

$$(1, p^2), \qquad (p, p), \qquad (p^2, 1).$$

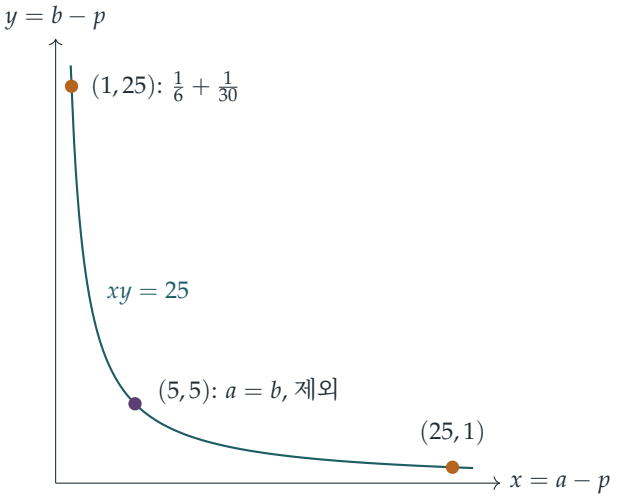
- (p, p)이면 $a = b = 2p$, 즉 $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$이다. 두 단위분수가 서로 다르지 않으므로 이 경우는 제외된다.
- $(1, p^2)$이면 $a = p+1, b = p^2 + p = p(p+1)$이고, 이는 앞에서 찾은 표현이다. $(p^2, 1)$은 같은 쌍의 순서만 바꾼 것이다.

따라서 두 항의 순서를 제외하면 가능한 방법은

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)},$$

하나뿐이고, 이로써 증명이 끝난다.

그림을 보면 그 이유를 알 수 있다. 해는 제1사분면에서 쌍곡선(hyperbola) $xy = p^2$ 위의 격자점(lattice point)이며, 여기서 $x = a - p$, $y = b - p$이다. 그림에서는 $p = 5$이다.



$2/N$ 꼴의 분수

이제 $N = p$가 홀수인 소수이고 $\frac{2}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$라고 하자. 양변에 abp를 곱하면 $2ab = pa + pb$이다. 직사각형을 완성하기 위해 먼저 양변에 2를 곱한다.

$$4ab - 2pa - 2pb = 0 \iff 4ab - 2pa - 2pb + p^2 = p^2 \iff (2a - p)(2b - p) = p^2.$$

? **생각해 보기** 인수분해하기 전에 왜 2를 곱할까?

$2ab - pa - pb$를 바로 인수분해하려면 $(a - \frac{p}{2})$와 같은 항이 필요한데, 이는 정수가 아니다. 2를 곱하면 모든 것이 정수로 유지되므로 인수 $2a - p$와 $2b - p$가 정수가 되고, 나누어떨어짐을 이용할 수 있다.

앞에서와 마찬가지로 $\frac{1}{a} < \frac{2}{p}$이므로 $2a > p$이고 $2a - p > 0$이다. 같은 방법으로 $2b - p > 0$이다. p^2의 양의 약수는 $1, p, p^2$이므로 $(2a - p, 2b - p)$는 다음 중 하나이다.

$$(1, p^2), \qquad (p, p), \qquad (p^2, 1).$$

- (p, p)이면 $a = b = p$, 즉 $\frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$이다. 서로 다르지 않으므로 제외된다.
- $(1, p^2)$이면
$$a = \frac{p+1}{2}, \qquad b = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$
p가 홀수이므로 $p + 1$은 짝수이고, 따라서 둘 다 정수이다. $p \geq 3$이므로 $a \geq 2$이고, 따라서 둘 다 1보다 크다. 또 $b = pa > a$이므로 둘은 서로 다르다. $(p^2, 1)$인 경우는 같은 쌍의 순서만 바꾼 것이다.

직접 확인하면 다음과 같다.

$$\frac{2}{p+1} + \frac{2}{p(p+1)} = \frac{2(p+1)}{p(p+1)} = \frac{2}{p}.$$

따라서 $\frac{2}{p}$는 서로 다른 두 단위분수의 합으로 나타낼 수 있고, (순서를 무시하면) 그 방법은

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}(p+1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}p(p+1)},$$

하나뿐이다. 이로써 마지막 결과가 증명된다.

검산

- $p = 3$: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$; $p = 5$: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $p = 7$: $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.
- $N < 300$인 모든 N에 대해 컴퓨터로 탐색한 결과, 모든 소수 N에 대해 $\frac{1}{N}$의 표현은 정확히 하나였고, 모든 홀수인 소수 N에 대해 $\frac{2}{N}$의 표현도 정확히 하나였으며, 이는 위의 공식과 일치한다.
- 소수라는 조건은 정말 중요하다. $N = 6$이면 표현이 네 가지 있다. 예를 들어 $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$이고, 이는 인수분해 $36 = 1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9$ 각각에 하나씩 대응한다 (쌍 6×6은 $a = b$를 준다).
- $p > 2$인 이유: $p = 2$이면 $\frac{2}{2} = 1$은 서로 다른 $a, b > 1$에 대해 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 꼴로 나타낼 수 없으며, 실제로 $(p+1)/2$도 정수가 아니다.

흔한 실수

- $a - N > 0$과 $b - N > 0$을 보이는 것을 잊어서, N^2의 음수 인수분해를 고려하지 않는 것.
- 같은 단위분수를 주는 인수분해 $N \times N$을 배제하지 않는 것.
- $2/N$의 경우에 $\frac{1}{2}(p+1)$이 정수인지 확인하지 않는 것(바로 이 부분에서 $p \neq 2$가 쓰인다).

STEP 너머

분수를 서로 다른 단위분수의 합으로 나타내는 일은 고대 이집트인까지 거슬러 올라가며, "이집트 분수"(Egyptian fractions)에는 아직도 풀리지 않은 문제가 있다. 에르되시(Erdős)–Straus 추측(conjecture)은 $N \geq 2$일 때 $\frac{4}{N}$이 항상 세 단위분수의 합으로 나타난다는 것인데, 아직 아무도 이를 증명하지 못했다. $xy - Nx - Ny = 0$을 $(x - N)(y - N) = N^2$으로 바꾸는 기법은 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을 다루는 표준적인 도구이며, 이를 통해 해의 개수를 세는 문제는 약수의 개수를 세는 문제가 된다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 약수와 소수의 세계로 나아가는 훌륭한 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.