풀이

STEP I 2000, 문제 9

역학 • 가속 좌표계에서의 포물체

> **STEP I 2000, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q9

핵심 아이디어

도달 거리(range)는 **객차 안에서** 측정하므로, 객차의 기준틀(frame of reference)에서 생각한다. 객차가 북쪽으로 가속도(acceleration) a로 가속하므로, 바닥에 대한 포탄의 가속도는 아래쪽으로 g에 더해 남쪽으로 a이며, 남쪽은 대포가 발사하는 방향이다. 운동은 여전히 등가속도 포물체 운동(projectile motion)이고, 수평 방향 항이 하나 더 있을 뿐이다. 도달 거리를 2θ로 나타내고 나면, 이를 최대화하는 것은 한 줄짜리 미분(differentiation)이다.

풀이

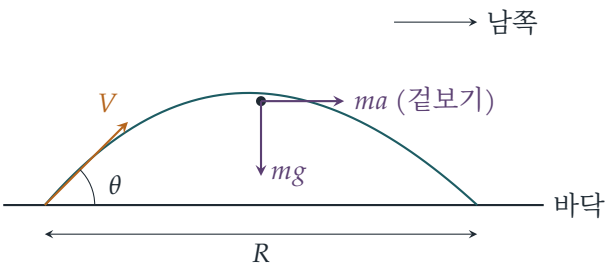
객차 안에서의 도달 거리

포탄을 질점(particle)으로 모형화하고 공기 저항(air resistance)은 무시한다. 포탄은 바닥 높이에서 발사되어 바닥에 떨어지며, 객차는 포탄이 그 안에 떨어질 만큼 충분히 길다고 가정한다. x축은 수평으로 남쪽(발사 방향)을 향하게, y축은 연직 위쪽을 향하게 잡고, 둘 다 객차에 대하여 측정한다.

지면 기준틀에서 포탄의 가속도는 아래쪽으로 g이고 수평 방향 가속도는 없다. 객차의 가속도는 북쪽으로 a이다. 따라서 **객차에 대한** 포탄의 가속도는

$$\ddot{x} = 0 - (-a) = a, \qquad \ddot{y} = -g.$$

이다. 같은 말로, 객차의 기준틀에서는 질량 m인 포탄에 무게 외에도 남쪽으로 크기 ma인 겉보기 힘(apparent force)이 작용한다.



객차에 대한 처음 속도는 남쪽으로 $V\cos\theta$, 위쪽으로 $V\sin\theta$이므로

$$x = Vt\cos\theta + \tfrac{1}{2}at^2, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 연직 방향 운동은 a의 영향을 받지 않는다. 포탄은 $t > 0$에서 $y = 0$일 때, 즉 $T = \dfrac{2V\sin\theta}{g}$에 떨어진다. 따라서 객차 안에서의 도달 거리는

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2V^2\sin\theta\cos\theta}{g} + \frac{a}{2}\cdot\frac{4V^2\sin^2\theta}{g^2} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$와 $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$를 이용하였다.

도달 거리의 최대화

θ에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2V^2}{g}\left(\cos 2\theta + \frac{a}{g}\sin 2\theta\right),$$

이고, 이것은

$$\boxed{\tan 2\theta = -\frac{g}{a}.}$$

일 때 영이 된다.

생각해 보기 탄젠트 값이 음수라니? 무언가 잘못되었다는 뜻일까?

그렇지 않다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이면 $0 < 2\theta < \pi$이고, $\tan 2\theta < 0$은 단지 2θ가 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있다는 뜻이므로 $\theta > \frac{\pi}{4}$이다. 이는 이치에 맞는다. 추가로 미는 힘 a는 포탄이 공중에 있는 동안 계속 작용하므로, 45°보다 조금 높게 쏘아 비행 시간을 더 버는 것이 이득이다. $a = 0$이면 $\cos 2\theta = 0$이 되어 익숙한 $\theta = \frac{\pi}{4}$를 얻는다.

이것이 최댓값(maximum)임을 보이기 위해, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$로서 $\tan\varphi = \dfrac{a}{g}$라 하자. 그러면

$$\sin 2\theta - \frac{a}{g}\cos 2\theta = \frac{\sin(2\theta-\varphi)}{\cos\varphi}, \qquad \text{이므로} \qquad R = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sin(2\theta-\varphi)}{\cos\varphi} + \frac{a}{g}\right).$$

이다. 이 값은 $2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$일 때, 즉 $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$일 때 가장 크며, 이것은 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있는 $\tan 2\theta = -g/a$의 근이다. 따라서 최적의 각은 정확히

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{g},$$

이고, $\cos\varphi = g/\sqrt{g^2+a^2}$이므로 최대 도달 거리는 정확히

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sqrt{g^2+a^2}}{g} + \frac{a}{g}\right) = \frac{V^2}{g^2}\left(a + \sqrt{g^2+a^2}\right).$$

이다.

a가 작을 때

u가 작으면 $\arctan u = u + O(u^3)$이다. $u = a/g$로 두면

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{g} + O\left(\frac{a^3}{g^3}\right)\right) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다. 도달 거리에 대해서는 $\sqrt{g^2+a^2} = g\sqrt{1+a^2/g^2} = g + O(a^2/g)$이므로

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g^2}(a + g + O(a^2/g)) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2},$$

이고, 이것이 요구한 두 번째 결과이다. 두 근사 모두 a/g에 대하여 일차까지 정확하며, 무시한 항은 $(a/g)^2$ 차수이거나 그보다 작다.

$\tan 2\theta$를 그대로 다루고 싶다면 $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$으로 둔다. 그러면 $\tan 2\theta = -\cot\varepsilon \approx -1/\varepsilon$이므로 $\varepsilon \approx a/g$이다. $\sin 2\theta = \cos\varepsilon \approx 1$과 $\cos 2\theta = -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon$을 R에 대입하면 일차까지 $R \approx \frac{V^2}{g}(1 + \frac{a}{g})$를 얻는다.

검산

- $a = 0$: 공식은 $\theta = \frac{\pi}{4}$와 $R_{\max} = V^2/g$로 바뀌며, 이는 평지에서의 표준적인 결과이다.
- 차원(dimension): a/g는 차원이 없고 V^2/g는 길이이므로, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- 수치적으로, $V = 7$, $g = 9.8$, $a = 1.3$으로 두고 지면 기준틀에서 운동을 단계별로 계산한 뒤 객차의 위치를 빼면 R에 대한 공식이 재현된다(예를 들어 $\theta = 0.7$에서 $R \approx 5.478$). 여러 개의 무작위 a에 대하여 θ를 전수 탐색하면 $\tan 2\theta = -g/a$인 곳에서 최댓값이 나타나며, $R_{\max}$는 $\frac{V^2}{g^2}(a + \sqrt{g^2+a^2})$와 유효숫자(significant figures) 10자리까지 일치한다. $a = 0.05$일 때 정확한 최적의 각 $0.787949\ldots$는 $\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g}$와 소수점 아래 일곱째 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- a의 부호를 잘못 잡는 것. 객차는 포탄의 발사 방향과 **반대쪽으로** 가속하므로, 바닥에 대하여 포탄은 남쪽으로 속력을 얻는다. 따라서 항 $\frac{1}{2}aT^2$는 빼는 것이 아니라 더하는 것이다.
- 도달 거리를 객차 안이 아니라 지면에서 측정하는 것. 문제는 객차 바닥을 따라 잰 거리를 묻고 있다.
- 계산기로 $2\theta = \arctan(-g/a)$를 구하는 것. 이렇게 하면 음의 각이 나온다. 올바른 근은 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있다.

STEP 너머

가속하는 기준틀에서 생각하면서 겉보기 힘 $-m\mathbf{a}$를 더하는 것은 **관성력**(fictitious force)의 가장 간단한 예이다. 회전하는 기준틀에서는 같은 방식으로 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)이 등장한다. 여기서 겉보기 힘은 단지 "유효 중력(effective gravity)"을 기울여 그 크기를 $\sqrt{g^2 + a^2}$로 만들 뿐이며, 이것이 답에 $\sqrt{g^2 + a^2}$가 들어 있는 이유를 이해하는 한 가지 방법이다. 비관성 기준틀(non-inertial frame)은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 명료하게 설명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.