풀이

STEP I 2000, 문제 8

순수수학 • 절댓값의 적분

> **STEP I 2000, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q8

핵심 아이디어

적분 안에 절댓값(modulus) 기호가 있으면, 절댓값 안의 식의 부호가 바뀌는 곳을 찾아서 처리한다. 부호가 바뀌는 점들 사이의 각 구간에서 $|f|$는 f이거나 $-f$이므로, 그 점들에서 적분 구간을 나누고 보통의 함수를 적분하면 된다. 실제로 해야 할 일은 모두 영점을 찾는 데 있다. xe^x는 눈으로 보고, 삼차식(cubic)은 인수분해(factorising)하여, $\sin x + \cos x$는 하나의 사인파로 나타내어 영점을 찾는다.

풀이

첫 번째 적분

모든 x에 대하여 $e^x > 0$이므로 xe^x의 부호는 x의 부호와 같다. 따라서 $[-1,0]$에서는 $xe^x \leq 0$이고 $|xe^x| = -xe^x$이며, $[0,1]$에서는 $xe^x \geq 0$이고 $|xe^x| = xe^x$이다. 적분 구간을 0에서 나누면

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-xe^x)\,dx + \int_{0}^{1} xe^x\,dx = -\int_{-1}^{0} xe^x\,dx + \int_{0}^{1} xe^x\,dx,$$

이고, 이것이 구하는 등식이다.

값을 계산하기 위해 $u = x$, $dv/dx = e^x$로 놓고 부분적분(integration by parts)을 한다.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c.$$

따라서

$$\int_{-1}^{0} xe^x \,dx = [(x-1)e^x]_{-1}^{0} = -1 - (-2e^{-1}) = \frac{2}{e} - 1,$$
$$\int_{0}^{1} xe^x \,dx = [(x-1)e^x]_{0}^{1} = 0 - (-1) = 1.$$

이 중 첫 번째 값은 음수이며(그 구간에서 피적분함수(integrand)가 음수이므로 당연히 그래야 한다),

$$\int_{-1}^{1} |xe^x| \,dx = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

소문항 (i)

$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$라 하자. 항을 묶으면

$$p(x) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x-2).$$

$[0,4]$에 있는 영점은 $x = 1$과 $x = 2$뿐이다. 최고차항의 계수가 양수이고 단순근 $-1, 1, 2$를 갖는 삼차식은 -1과 1 사이에서 양수, 1과 2 사이에서 음수, 2보다 큰 곳에서 양수이다. 따라서

$$|p(x)| = \begin{cases} p(x), & 0 \le x \le 1, \\ -p(x), & 1 \le x \le 2, \\ p(x), & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

부정적분(antiderivative)으로

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x,$$

를 택하면

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + 2 = \tfrac{13}{12},$$
$$F(2) = 4 - \tfrac{16}{3} - 2 + 4 = \tfrac{2}{3}, \qquad F(4) = 64 - \tfrac{128}{3} - 8 + 8 = \tfrac{64}{3}.$$

생각해 보기 왜 그냥 $F(4) - F(0)$을 계산한 뒤 절댓값을 취하면 안 될까?

절댓값은 답이 아니라 피적분함수에 적용해야 하기 때문이다. $[1,2]$에서 삼차식은 음수이므로, $F(4) - F(0)$은 그 부분의 넓이를 더하는 대신 빼 버린다. 그래서 세 부분을 따로 다룬다.

$$\begin{aligned} \int_{0}^{4} |p(x)| \,dx &= (F(1) - F(0)) - (F(2) - F(1)) + (F(4) - F(2)) \\ &= \tfrac{13}{12} - (\tfrac{2}{3} - \tfrac{13}{12}) + (\tfrac{64}{3} - \tfrac{2}{3}) \\ &= \tfrac{13}{12} + \tfrac{5}{12} + \tfrac{62}{3} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{62}{3} = \frac{133}{6}. \end{aligned}$$

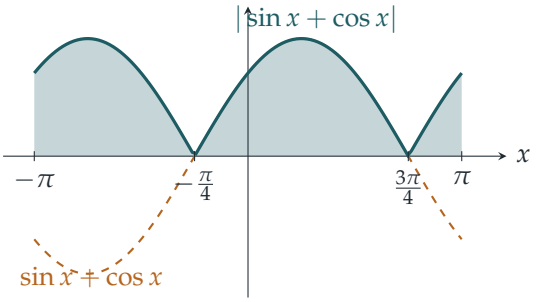
각 괄호의 값은 마땅히 그래야 하듯 모두 양수이다. $\frac{13}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{62}{3}$은 서로 다른 세 부분의 넓이이다. (비교하자면 $F(4) - F(0) = \frac{64}{3}$이고, 이는 $2 \times \frac{5}{12}$만큼 작다.)

소문항 (ii)

$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$를 이용하면

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin(x+\tfrac{\pi}{4}).$$

이 식은 $[-\pi, \pi]$에서 $x = -\frac{\pi}{4}$와 $x = \frac{3\pi}{4}$일 때 0이 된다. $[-\pi, -\frac{\pi}{4}]$와 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$에서는 음수이고, 그 사이에서는 양수이다.



앞에서처럼 세 부분으로 나눌 수도 있지만, 더 깔끔한 방법이 있다. $u = x + \frac{\pi}{4}$로 치환(substitute)하면

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4} |\sin u|\,\mathrm{d}u.$$

함수 $|\sin u|$의 주기(period)는 π이고, 새 적분 구간의 길이는 2π이므로 정확히 두 주기를 덮는다. 주기함수(periodic function)를 정수 개의 주기에 걸쳐 적분한 값은 시작점에 관계없으므로

$$\sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4} |\sin u|\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\times 2\int_{0}^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\times 2\times 2 = 4\sqrt{2}.$$

직접 나누는 방법을 선호한다면, $G(x) = \sin x - \cos x$는 $\sin x + \cos x$의 부정적분이고 $G(-\pi) = 1$, $G(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$, $G(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}$, $G(\pi) = 1$이다. 세 부분의 넓이는 $1+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$이고, 이를 더하면 $4\sqrt{2}$이다.

검산

- (피적분함수가 매끄러운) 각 부분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 첫 번째 적분의 값으로 1.264241…을 얻고, 이는 $2 - 2/\mathrm{e} \approx 1.264241$과 일치한다.
- (i)에서 수치적분을 하면 22.16667을 얻고, 이는 $\frac{133}{6}$과 일치한다. 또한 이 값은 $F(4) - F(0) = \frac{64}{3} \approx 21.33$보다 조금 큰데, 절댓값이 작은 음의 넓이를 양의 넓이로 바꾸므로 당연히 그래야 한다.

- (ii)에서 수치적분을 하면 5.656854를 얻고, 이는 $4\sqrt{2}$와 일치한다. 타당성 검사: $|\sin x + \cos x|$는 $\sqrt{2}|\sin x|$와 모양이 같고, 그 평균값은 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$이며, $2\pi \times \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 4\sqrt{2}$이다.

흔한 실수

- 부호가 바뀌는 점을 그대로 가로질러 적분한 뒤 마지막에 절댓값을 취하는 것. 이렇게 하면 음수인 영역을 모두 적게 셈하게 된다.
- (i)에서 근 $x = 1$을 놓치는 것. 항상 완전히 인수분해하거나, 적어도 인수정리(factor theorem)로 작은 정수근을 확인하라.
- $\left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0}$에서의 부호 실수. $x = -1$에서의 값은 $-2\mathrm{e}^{-1}$이므로, 이를 빼면 $2/\mathrm{e}$를 더하는 것이 된다.

STEP 너머

적분 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$는 곡선과 축 사이의 전체 넓이이다. 대학에서는 이것이 f의 L^1 노름(L^1 norm)으로 다시 등장하는데, 이는 함수의 크기와 두 함수 사이의 거리를 재는 한 가지 방법이다. f가 적분가능(integrable)하면 $|f|$도 적분가능하다는 것과 $\left|\int f\right| \le \int |f|$임을 증명하는 것은 실해석(real analysis)의 초반에 나오는 표준적인 연습문제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 리만 적분(Riemann integral)을 이 두 가지를 모두 증명할 수 있을 만큼 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.