풀이

STEP I 2000, 문제 7

순수수학 • 도함수의 한계

> **STEP I 2000, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q7

핵심 아이디어

미분하면 조건 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$은 "a가 x에 관한 어떤 함수보다 크거나 같다"는 조건이 된다. 따라서 모든 것은 그 함수의 **최댓값**에 달려 있다. 이 함수는 x^2에만 의존하며, 치환 $u = 1 + x^2$를 하면 $1/u$에 관한 이차식이 된다. 그러면 완전제곱식(completing the square)으로 고쳐서 최댓값을 구할 수 있고, 최댓값이 정확히 어디에서 나타나는지도 알 수 있다.

풀이

도함수

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2},$$

이므로

$$\mathrm{f}'(x) = a - g(x), \qquad \text{여기서} g(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

따라서 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$인 것은 모든 x에 대하여 $a \geq g(x)$인 것과 정확히 같다. 이제 g의 최댓값을 구해야 한다.

g의 최댓값

$u = 1 + x^2$로 놓으면 $u \geq 1$이고 $x^2 = u - 1$이다. 그러면

$$g = \frac{(u-1)(u+2)}{u^2} = \frac{u^2 + u - 2}{u^2} = 1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}.$$

생각해 보기 이 식을 u가 아니라 $1/u$로 나타내는 것이 왜 좋은 생각일까?

$s = 1/u$로 나타내면 $g = 1 + s - 2s^2$으로 그저 이차식이 되고, 이차식의 최댓값은 미적분 없이 완전제곱식으로 고쳐서 구할 수 있다.

$$1 + s - 2s^2 = \frac{9}{8} - 2\left(s - \frac{1}{4}\right)^2.$$

제곱은 결코 음수가 아니므로 모든 x에 대하여 $g \le \frac{9}{8}$이고, 등호는 $s = \frac{1}{4}$, 즉 $u = 4$, $x = \pm\sqrt{3}$일 때만 성립한다.

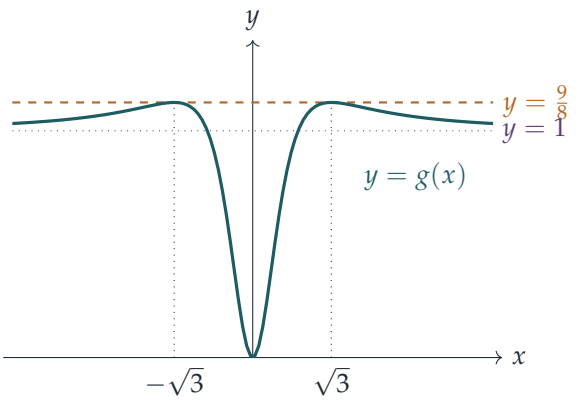
이것을 다시 x로 나타내면($s - \frac{1}{4} = \frac{3-x^2}{4(1+x^2)}$을 이용한다) 도함수에 대한 깔끔한 항등식을 얻는다.

$$\mathrm{f}'(x) = \left(a - \frac{9}{8}\right) + \frac{(3-x^2)^2}{8(1+x^2)^2}.$$

결론

$a \ge \frac{9}{8}$이면 첫 번째 괄호는 음이 아니고, 두 번째 항은 제곱을 양수로 나눈 것이므로 역시 음이 아니다. 따라서 요구한 대로 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}'(x) \ge 0$이다.

상수 $\frac{9}{8}$은 또한 가장 좋은 값이다. $a < \frac{9}{8}$이면 $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = a - \frac{9}{8} < 0$이기 때문이다. $a = \frac{9}{8}$일 때 f'은 $x = \pm\sqrt{3}$에서만 0이므로, f는 여전히 순증가(strictly increasing)하며 정류 변곡점(stationary point of inflection) 두 개를 가진다.



g의 그래프는 0에서 올라가 극한값 1을 넘어서고, $x = \pm\sqrt{3}$에서 최댓값 $\frac{9}{8}$에 이른 뒤 다시 1을 향해 내려간다. 도함수 $\mathrm{f}'(x)$는 직선 $y = a$가 이 곡선보다 위에 있는 높이이다.

검산

- $x = \sqrt{3}$에서: $g = \dfrac{3 \cdot 6}{4^2} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8}$. ✓
- $x \to \infty$일 때 $g \to 1 < \frac{9}{8}$이다. x가 클 때 $\frac{x^3}{1+x^2}$은 x처럼 행동하므로 그 기울기가 1에 가까워지는 것이 타당하다.
- 수치적으로, $a = \frac{9}{8}$일 때 $[-100, 100]$에서 간격 0.001인 격자 위의 $\mathrm{f}'(x)$의 최솟값은 약 2×10^{-10}이다($x \approx \pm\sqrt{3}$에서 사실상 0). $a = 1.1$이면 $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = -0.025 < 0$이다.

흔한 실수

- 무한대에서 g의 극한값 1을 최댓값으로 착각하는 것. 곡선이 1을 넘어서기 때문에 답은 1이 아니라 $\frac{9}{8}$이다.
- g를 직접 미분하다가 계산 속에서 길을 잃는 것. 치환 $s = 1/(1+x^2)$을 하면 한 줄짜리 완전제곱식 변형으로 바뀐다.

STEP 너머

여기서는 "모든 x에 대하여"라는 명제를 **상한**(supremum)을 구하는 문제로 바꾸었다. 즉 모든 곳에서 $\mathrm{f}' \geq 0$인 것은 $a \geq \sup g$인 것과 정확히 같다. g가 무한대에서 극한값을 가지지만 최댓값은 유한한 점에서 나타난다는 사실은, 극한값이 반드시 경계가 되는 것은 아니라는 좋은 경고이다. 해석학(analysis)에서는 도함수가 음이 아닌 함수가 증가함수임을 (평균값 정리(Mean Value Theorem)를 이용하여) 증명하게 되는데, 이 때문에 이 문제는 사실 f가 단조(monotonic)인지를 묻는 문제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 이러한 아이디어들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.