풀이

STEP I 2000, 문제 6

순수수학 • 직선으로 둘러싸인 영역

> **STEP I 2000, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q6

핵심 아이디어

x와 y에 대한 이차식(quadratic expression)이 두 일차식의 곱으로 인수분해(factorise)되면, 그 식은 두 직선의 쌍을 나타낸다. 두 인수의 곱은 두 인수의 부호가 같을 때 정확히 양수이고, 부호가 다를 때 음수이다. 따라서 각 부등식은 교차하는 두 직선 사이에서 서로 마주 보는 한 쌍의 "쐐기(wedge)" 영역을 골라낸다. 두 영역을 같은 좌표축 위에 그리고 나면, 공통인 점을 찾는 일은 그림을 보기만 하면 된다.

풀이

첫 번째 인수분해와 영역

우변을 전개하면

$$\begin{aligned}(x-y+2)(x+y-1) &= x^2+xy-x-xy-y^2+y+2x+2y-2\\ &= x^2-y^2+x+3y-2,\end{aligned}$$

이므로 요구한 대로이다. 따라서 첫 번째 부등식은 양변에서 2를 빼면

$$(x-y+2)(x+y-1) > 0.$$

이 된다. 경계(boundary)는 두 직선

$$L_1:\ y = x+2, \qquad L_2:\ y = 1-x,$$

로 이루어진다. 두 직선의 기울기(gradient)는 각각 1과 -1이고, $x+2 = 1-x$일 때, 즉 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$에서 만난다.

곱은 두 인수의 부호가 같을 때 양수이다.

- 둘 다 양수인 경우: $y < x + 2$이고 $y > 1 - x$, 즉 L_1의 아래쪽이면서 L_2의 위쪽이다. 이것은 교점의 **오른쪽** 쐐기이다(예를 들어 $(5, 0)$을 포함한다).
- 둘 다 음수인 경우: $y > x + 2$이고 $y < 1 - x$, 즉 L_1의 위쪽이면서 L_2의 아래쪽이다. 이것은 교점의 **왼쪽** 쐐기이다($(-5, 0)$을 포함한다).

따라서 이 영역은 직선 $y = x + 2$와 $y = 1 - x$ 사이에서 왼쪽과 오른쪽으로 마주 보는 한 쌍의 쐐기이며, 직선 자체는 제외된다(직선 위에서 곱은 0이고, > 0이 아니다). 간단히 확인해 보자. 원점에서 식의 값은 $-2 < 0$이고, 원점은 아래쪽 쐐기에 있으므로 올바르게 제외된다.

두 번째 영역

> **생각해 보기** 이 식도 인수분해된다는 것을 어떻게 알 수 있을까? 그리고 인수는 어떤 모양이어야 할까?

이차항 $x^2 - 4y^2 = (x + 2y)(x - 2y)$을 보면

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = (x + 2y + a)(x - 2y + b).$$

의 꼴을 시도해 볼 만하다. 우변을 전개하면 $x^2 - 4y^2 + (a + b)x + (2b - 2a)y + ab$이다. 계수를 비교(matching coefficients)하면 $a + b = 3$, $b - a = -1$이므로 $a = 2$, $b = 1$이고, 이때 상수항 $ab = 2$도 일치한다. 따라서 두 번째 부등식의 양변에 2를 더하면

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y < -2 \iff (x + 2y + 2)(x - 2y + 1) < 0.$$

이다. 경계 직선은

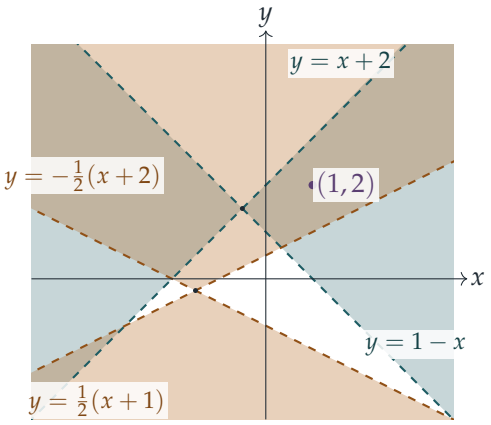
$$L_3 : \ y = -\tfrac{1}{2}(x + 2), \qquad L_4 : \ y = \tfrac{1}{2}(x + 1),$$

이고, 기울기는 $-\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{2}$이며, $-x - 2 = x + 1$일 때, 즉 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$에서 만난다.

이제 두 인수의 부호가 **서로 달라야** 한다.

- $x + 2y + 2 > 0$이고 $x - 2y + 1 < 0$인 경우: $y > -\frac{1}{2}(x + 2)$이고 $y > \frac{1}{2}(x + 1)$, 즉 두 직선 모두의 위쪽이다. 이것은 **위쪽** 쐐기이다($(0, 5)$를 포함한다).
- $x + 2y + 2 < 0$이고 $x - 2y + 1 > 0$인 경우: 두 직선 모두의 아래쪽이다. 이것은 **아래쪽** 쐐기이다($(0, -5)$를 포함한다).

따라서 두 번째 영역은 직선 L_3과 L_4 사이에서 위와 아래로 마주 보는 한 쌍의 쐐기이며, 이번에도 경계는 제외된다.



그림에서 첫 번째 영역은 청록색(왼쪽과 오른쪽 쐐기), 두 번째 영역은 호박색(위쪽과 아래쪽 쐐기)으로 칠했으므로, 더 진하게 겹친 부분이 두 부등식이 모두 성립하는 곳이다. 점선은 영역에 포함되지 않는다.

두 영역에 모두 속하는 점

두 쌍의 쐐기는 분명히 겹친다. 오른쪽 청록색 쐐기는 기울기 ± 1인 두 직선 사이에서 오른쪽으로 벌어지고, 위쪽 호박색 쐐기는 기울기가 $\pm\frac{1}{2}$인 더 완만한 두 직선 모두의 위쪽에 있는 모든 점을 포함한다. $x > -\frac{1}{2}$에서는 청록색 쐐기의 윗변 $y = x + 2$가 직선 $y = \frac{1}{2}(x+1)$보다 더 빠르게 올라가므로, 둘 사이에 공간이 생긴다.

예를 들어 $(x, y) = (1, 2)$를 잡자. 그러면

$$x^2 - y^2 + x + 3y = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 > 2$$

이고

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = 1 - 16 + 3 - 4 = -16 < -2,$$

이므로 $(1, 2)$는 두 부등식을 모두 만족한다. (인수로 확인하면 $(x - y + 2)(x + y - 1) = 1 \cdot 2 > 0$이고 $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot (-2) < 0$이다.)

검산

- 각 인수분해는 임의의 점에서 확인할 수 있다. $(3, 1)$에서 $x^2 - y^2 + x + 3y - 2 = 12$이고 $(x - y + 2)(x + y - 1) = 4 \cdot 3 = 12$이다. 같은 점에서 $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = 14$이고 $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot 2 = 14$이다.
- 각 쐐기에서 점을 하나씩 확인한다. 예를 들어 $(0, -5)$에서는 $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = -90 < -2$이므로, 아래쪽 호박색 쐐기가 두 번째 영역에 속함을 확인할 수 있다.

- $[-10, 10]^2$에서 무작위로 고른 200 000개의 점으로 수치 검사를 해 보았더니, 부등식과 위의 쐐기 설명이 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- 엉뚱한 쌍의 쐐기를 칠하는 실수. "위쪽", "아래쪽"이라는 말에 의존하지 말고 항상 점 하나를 대입해 확인하라(원점이 가장 쉽다).
- 상수를 이항할 때 -2와 $+2$를 빠뜨리는 실수. 첫 번째 부등식은 $(x-y+2)(x+y-1) > 0$이고, 두 번째는 $(x+2y+2)(x-2y+1) < 0$이다.
- 경계 직선을 실선으로 그리는 실수. 부등식에 등호가 없으므로 직선은 제외된다.

STEP 너머

두 변수에 대한 이차식 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$는 원뿔곡선(conic)을 정의한다. 이 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되면 원뿔곡선은 두 직선의 쌍인 **퇴화**(*degenerate*) 원뿔곡선이 되며, 이는 계수로 만든 어떤 3×3 행렬식(determinant)이 0이 될 때 정확히 일어난다. 이차형식(quadratic form)의 부호 패턴(여기서는 $x^2 - y^2$와 $x^2 - 4y^2$로, 둘 다 부정부호(indefinite)이다)은 대학 1학년 선형대수(linear algebra)에서 대칭행렬(symmetric matrix)과 그 고윳값(eigenvalue)을 통해 공부한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)에서 이 내용을 살펴보기 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.