풀이

STEP I 2000, 문제 5

순수수학 • 3차원 벡터

> **STEP I 2000, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q5

핵심 아이디어

모든 일은 경사면 위에서 일어나므로, **그 평면 안에** 서로 수직인 두 단위벡터(unit vector)를 잡는다. 하나는 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 곧장 위쪽을 향하고, 다른 하나는 수평 방향이다. 그러면 아서(Arthur)와 버사(Bertha)의 위치는 이 두 벡터의 간단한 일차결합이 되고, 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formulae)을 쓰면 두 위치의 차가 곧바로 깔끔하게 정리된다. 연직선과 이루는 각을 구하려면 평면 안의 두 방향이 각각 연직 방향에 대해 어떻게 놓여 있는지만 알면 되는데, 바로 여기서 θ가 등장한다.

풀이

설정하기

$\mathbf{e}$를 O를 지나는 가장 가파른 선을 따라 위쪽을 향하는 단위벡터라 하고, $\mathbf{f}$를 평면 안에서 $\mathbf{e}$에 수직이며 두 사람이 걷는 쪽을 향하는 단위벡터라 하자. $\mathbf{f}$는 최대 경사선에 수직이므로 수평이다. $\mathbf{k}$를 연직 위쪽을 향하는 단위벡터라 하자. 그러면

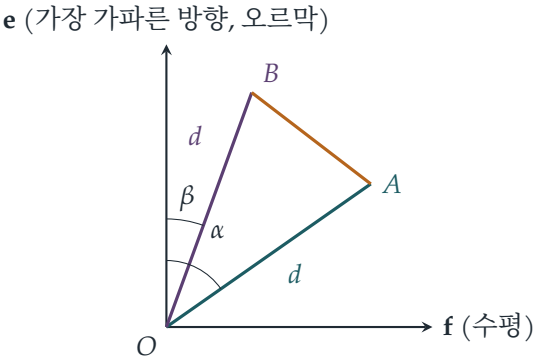
$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta, \qquad \mathbf{f}\cdot\mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{f} = 0.$$

이다. (첫 번째 식이 성립하는 까닭은 $\mathbf{e}$가 수평면과 각 θ를 이루므로 $\mathbf{k}$와는 각 $\frac{\pi}{2} - \theta$를 이루기 때문이다.)

두 사람은 같은 속력으로 걸으므로, 아서가 거리 d만큼 걸었을 때 버사도 거리 d만큼 걸었다. O에 대한 두 사람의 위치는

$$\mathbf{a} = d(\cos\alpha\,\mathbf{e} + \sin\alpha\,\mathbf{f}), \qquad \mathbf{b} = d(\cos\beta\,\mathbf{e} + \sin\beta\,\mathbf{f}).$$

이다. 가장 가파른 선의 같은 쪽에서 오르막으로 걷는다는 것은 $0 \le \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$라는 뜻이다.



이 그림은 경사면 자체를 정면으로 바라보며 그린 것이다.

두 사람 사이의 거리

합을 곱으로 바꾸는 공식을 쓰면

$$\begin{aligned}\mathbf{a}-\mathbf{b} &= d[(\cos\alpha-\cos\beta)\,\mathbf{e}+(\sin\alpha-\sin\beta)\,\mathbf{f}]\\ &= d[-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{e}+2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{f}]\\ &= 2d\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,[-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{f}].\end{aligned}$$

이다. $s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$라 하자. $\mathbf{e}$와 $\mathbf{f}$는 서로 수직인 단위벡터이고 $\sin^2 s+\cos^2 s=1$이므로, 벡터 $\mathbf{u}=-\sin s\,\mathbf{e}+\cos s\,\mathbf{f}$는 단위벡터이다. 따라서

$$AB=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2d\,|\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)|,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (기하적으로 보면, OAB는 두 등변의 길이가 d이고 꼭지각이 $|\alpha-\beta|$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이다. O에서 수선을 내리면 같은 답을 얻는다.)

연직선과 이루는 각

$\alpha\neq\beta$이면 $0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\neq 0$이다. 따라서 $A\neq B$이고 직선 AB가 잘 정의된다. 위의 계산은 이 직선이 단위벡터 $\mathbf{u}$에 평행함을, 다시 말해 $\mathbf{v}=-\mathbf{u}=\sin s\,\mathbf{e}-\cos s\,\mathbf{f}$에 평행함을 보여 준다.

> ? **생각해 보기** 직선에는 두 방향이 있다. 그중 어느 방향을 연직 방향과 비교해야 할까?

직선과 연직선 사이의 각은 예각(또는 직각)이므로, 직선을 따르는 방향 가운데 위쪽을, 적어도 아래쪽은 아닌 쪽을 향하는 방향을 쓴다. 이제

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=\sin s\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k})-\cos s\,(\mathbf{f}\cdot\mathbf{k})=\sin\theta\sin s.$$

이다. $0 \le s < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 이 값은 음이 아니며, 따라서 $\mathbf{v}$가 위쪽 방향이다. $\mathbf{v}$와 $\mathbf{k}$가 모두 단위벡터이므로 둘 사이의 각 ϕ는

$$\cos\phi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

를 만족하고, 이것이 구하는 결과이다. 이 값이 d에 의존하지 않는다는 점에 주목하자. 두 사람이 걷는 동안 직선 AB는 자기 자신과 평행하게 움직인다.

검산

- 아서가 수평으로 걷고($\alpha = \frac{\pi}{2}$, 경계의 경우) 버사가 곧장 위로 걸으면($\beta = 0$), $AB = 2d\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,d$인데, 이는 길이가 d인 서로 수직인 두 경로에 대한 피타고라스(Pythagoras) 정리이다. $\theta = 30^\circ$, $d = 1$로 두고 좌표로 계산하면 $A = (1,0,0)$, $B = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$이므로, B에서 A까지 거리 $\sqrt{2}$ 동안 연직으로 $\frac{1}{2}$만큼 내려간다. 따라서 $\cos\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.354$이고, 이는 $\sin 30^\circ \sin 45^\circ$와 일치하며 $\phi \approx 69.3^\circ$이다.
- 평면이 수평이면($\theta = 0$) $\cos\phi = 0$이다. 즉 직선은 수평인데, 마땅히 그래야 한다.
- 실제 3차원 좌표에서 θ, α, β, d를 무작위로 10^5번 골라 컴퓨터로 확인한 결과, 두 공식 모두와 10^{-12} 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 공간에서 연직선과 이루는 각 대신 평면 안에서 AB와 가장 가파른 선 사이의 각을 재는 실수. 답에는 반드시 θ가 나타나야 한다.
- 절댓값을 빠뜨리는 실수. $\beta > \alpha$이면 $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$는 음수이지만, 거리는 음수가 아니다.
- AB를 따라 아래쪽 방향을 잡아서 $\cos\phi = -\sin\theta\sin s$를 얻는 실수. 직선이 연직선과 이루는 각은 결코 둔각이 아니다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 문제에 맞춘 정규직교기저(orthonormal basis)를 고르고(평면 안의 두 벡터를 잡은 다음, 이를 주변 공간의 연직 방향과 관련짓는다), 내적(dot product)으로부터 길이와 각을 읽어 내는 것이다. 대학 1학년 선형대수학 강의에서 이것은 기저 변환(change of basis)과 정사영(orthogonal projection)의 개념으로 발전한다. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$는 $\mathbf{v}$를 연직 방향으로 정사영한 길이이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 풍부한 기하적 설명과 함께 이러한 개념들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.