풀이

STEP I 2000, 문제 4

순수수학 • 적분의 상계와 하계

STEP I 2000, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s1-q4

핵심 아이디어

$1/(x^2+1)^4$은 초등적인 방법으로 쉽게 적분할 수 없으므로, 문제는 이를 두 조각으로 나눈다. 하나는 저절로 적분되는 어떤 함수의 도함수(exact derivative)이고, 다른 하나는 크기가 작은 나머지 항이다. 소문항 (ii)에서 이 분해를 만들고, 소문항 (i)에서 나머지 항의 상계(bound)를 얻는다. 적분값을 어림할 때는 보통 피적분함수(integrand)를 어림한 다음 구간의 길이를 곱한다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = \dfrac{x^6}{(x^2+1)^4}$라 하자. f는 x^2에만 의존하므로 $t = x^2$으로 치환(substitution)하면, x가 $[0,1]$에서 움직일 때 t도 $[0,1]$에서 움직이고 $f = g(t)$이다. 여기서

$$g(t) = \frac{t^3}{(1+t)^4}.$$

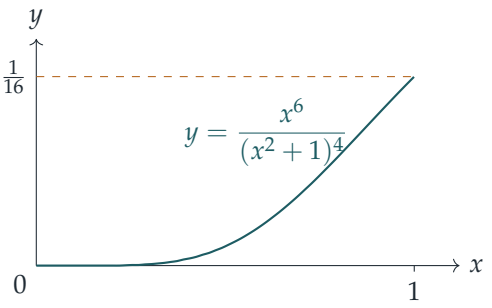
몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$g'(t) = \frac{3t^2(1+t)^4 - 4t^3(1+t)^3}{(1+t)^8} = \frac{t^2(3(1+t)-4t)}{(1+t)^5} = \frac{t^2(3-t)}{(1+t)^5}.$$

$0 < t \leq 1$일 때 모든 인수가 양수이므로(특히 $3-t \geq 2$), $g'(t) > 0$이고 g는 $[0,1]$에서 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 최댓값은 $t = 1$, 즉 $x = 1$에서 나타나고

$$f(1) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 또한 구간 전체에서 $f(x) \geq 0$이고, 최솟값은 $f(0) = 0$이다.



소문항 (ii)

괄호 안의 식을 몫의 미분법으로 미분한다. $N = Ax^5 + Bx^3 + Cx$라 하고 분모 $(x^2+1)^3$의 도함수가 $6x(x^2+1)^2$임을 이용하면, $(x^2+1)^2$ 인수 하나가 약분되어

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{N}{(x^2+1)^3}\right) = \frac{(5Ax^4+3Bx^2+C)(x^2+1) - 6x(Ax^5+Bx^3+Cx)}{(x^2+1)^4}.$$

분자를 전개하여 x의 거듭제곱끼리 정리하면

$$\begin{aligned} &5Ax^6 + 5Ax^4 + 3Bx^4 + 3Bx^2 + Cx^2 + C - 6Ax^6 - 6Bx^4 - 6Cx^2 \\ &\quad = -Ax^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C. \end{aligned}$$

이제 모든 항의 분모가 $(x^2+1)^4$이므로, 이 항등식(identity)이 모든 x에 대하여 성립할 필요충분조건은 분자가 다항식으로서 같은 것이다.

$$(D-A)x^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C = 1.$$

낮은 차수부터 계수를 비교(comparing coefficients)하면 $C = 1$이고, 이어서 $3B = 5C = 5$, $5A = 3B = 5$, $D = A$이다. 따라서

$$A = 1, \qquad B = \tfrac{5}{3}, \qquad C = 1, \qquad D = 1.$$

소문항 (iii)

소문항 (ii)의 항등식을 $[0,1]$에서 적분한다. 우변의 첫째 항은 어떤 함수의 도함수이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} &= \left[\frac{x^5 + \frac{5}{3}x^3 + x}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1+\frac{5}{3}+1}{8} - 0 + J = \frac{11}{24} + J, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$이다.

? 생각해 보기 J를 직접 계산하지 않고 어떻게 어림할 수 있을까?

소문항 (i)에 의해 J의 피적분함수는 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $0 \le f(x) \le \frac{1}{16}$을 만족한다. 이 부등식을 길이가 1인 구간에서 적분하면

$$0 \le J \le \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}.$$

각 변에 $\frac{11}{24}$를 더하면

$$\frac{11}{24} \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \le \frac{11}{24} + \frac{1}{16},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (f는 연속이고 구간 전체에서 어느 한계값과도 항상 같지는 않으므로 사실 두 부등식 모두 등호 없이 성립하지만, 문제에서는 $\le$만 요구한다.)

검산

- 소문항 (ii)의 항등식에 $x = 0$을 대입하면 도함수 항은 $C = 1$이고 D 항은 0이 되어 $1 = 1$을 얻는다. $x = 1$에서는 도함수의 분자가 $-1+0+0+1 = 0$이므로 항등식은 $\frac{1}{16} = \frac{D}{16}$이 되어 $D = 1$과 들어맞는다.
- 수치적으로 심프슨 공식(Simpson's rule)을 쓰면 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \approx 0.47460$이고, 이는 $\frac{11}{24} \approx 0.45833$과 $\frac{11}{24} + \frac{1}{16} \approx 0.52083$ 사이에 넉넉히 들어간다. f는 $x = 1$ 근처를 제외하면 매우 작으므로, 나머지 $J \approx 0.01627$은 $\frac{1}{16}$보다 훨씬 작다.

흔한 실수

- 몫의 미분법에서 공통인수 $(x^2+1)^2$을 약분하지 않아 분모가 $(x^2+1)^6$으로 남고, 계수 비교가 엉망이 되는 경우.
- 소문항 (i)에서 $x = 1$이 정상점(stationary point)이거나 끝점(endpoint)이라는 것만 확인하는 경우. 끝점에서의 값이 최댓값임을 알려면 f가 증가함을 보이거나 모든 후보를 비교해야 한다.

STEP 너머

$x = \tan\theta$로 치환하면 이 적분은 $\int_0^{\pi/4} \cos^6\theta \, \mathrm{d}\theta$가 되고, 이는 점화식(reduction formula)을 이용하여 정확히 계산할 수 있다. 그 값은 $\frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}$로, 앞의 수치 추정과 일치한다. 피적분함수를 "어떤 함수의 도함수와 작은 나머지"로 나누는 것이 점화식의 바탕에 있는 아이디어이고, 피적분함수를 어림하여 적분을 어림하는 것은 해석학(real analysis)의 기본적인 추

정이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(해석학 입문)에서 이러한 추정을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.