풀이

STEP I 2000, 문제 3

순수수학 • 계단함수의 적분

STEP I 2000, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s1-q3

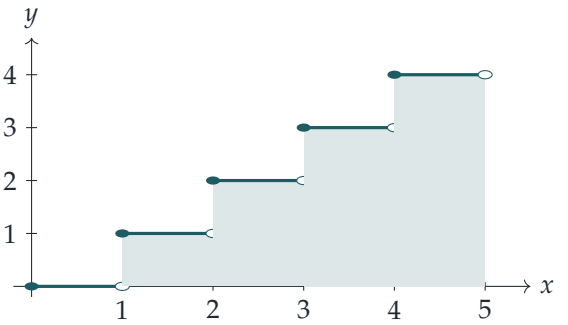
핵심 아이디어

어떤 값이든 그 정수 부분(integer part)은 계단 함수(step function)이다. 즉, 구간 위에서는 일정한 값을 유지하다가 1만큼 뛰어오른다. 따라서 적분은 직사각형 넓이의 합일 뿐이고, 실제로 해야 할 일은 각 계단이 어디에서 시작하고 끝나는지 찾는 것뿐이다. $[\mathrm{e}^x]$의 경우 e^x가 정수를 지나는 곳, 곧 $x = \ln k$에서 값이 뛰고, 그 결과로 얻는 로그의 합은 깔끔하게 소거(telescoping)된다.

풀이

$y = [x]$의 그래프

각 구간 $k \le x < k+1$ (k는 정수)에서 $[x] = k$이다. 따라서 그래프는 길이가 각각 1인 수평 선분들로 이루어진 계단 모양이며, 왼쪽 끝에는 속이 찬 점(그 값을 가짐)이, 오른쪽 끝에는 속이 빈 점(함수가 1만큼 뛰어오르는 곳)이 있다.



적분값은 색칠한 부분의 넓이이며, 이는 너비가 1이고 높이가 $0, 1, 2, 3, 4$인 직사각형들로 이루어진다(한 점 $x = 1, 2, 3, 4$에서의 값은 넓이에 아무 영향을 주지 않는다). 따라서

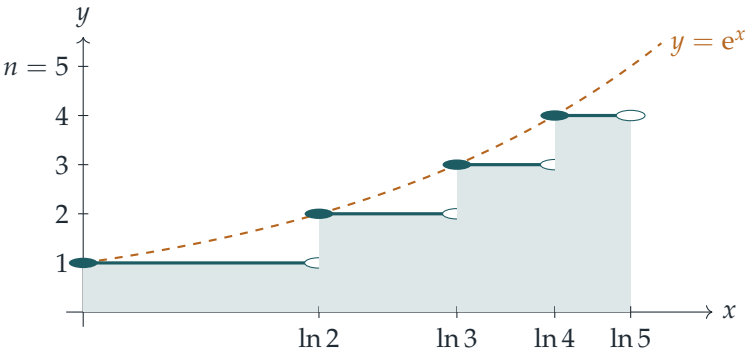
$$\int_0^5 [x]\,\mathrm{d}x = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

$y = [\mathrm{e}^x]$의 그래프

$0 \le x < \ln n$이면 $1 \le \mathrm{e}^x < n$이다. e^x는 증가함수이므로

$$[\mathrm{e}^x] = k \iff k \le \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \le x < \ln(k+1),$$

이다. 단, $k = 1, 2, \ldots, n-1$이다. 따라서 그래프는 이번에도 높이가 1씩 올라가는 계단 모양이지만, 이제는 x가 커질수록 계단의 폭이 좁아진다. 높이 k인 계단의 폭은 $\ln(k+1) - \ln k = \ln(1 + \frac{1}{k})$이다. 아래 그림은 $n = 5$인 경우이며, 곡선 $y = \mathrm{e}^x$는 점선으로 나타냈다. 계단은 각 계단의 왼쪽 끝에서 곡선과 만난다.



적분

높이 k에 폭 $\ln(k+1) - \ln k$를 곱한 직사각형 넓이들을 더하면

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} k(\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k.$$

생각해 보기 두 합이 서로 상쇄되게 하려면 어떻게 해야 할까?

각 $\ln j$는 두 합에 모두 나타나지만 계수가 다르다. 첫 번째 합에서 $j = k+1$로 치환하면 두

합의 항이 나란히 맞춰진다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k &= \sum_{j=2}^{n}(j-1)\ln j - \sum_{j=1}^{n-1} j\ln j \\ &= (n-1)\ln n + \sum_{j=2}^{n-1}((j-1)-j)\ln j - 1\cdot\ln 1 \\ &= (n-1)\ln n - \sum_{j=2}^{n-1}\ln j.\end{aligned}$$

여기서 첫 번째 합에서는 $j=n$인 항을, 두 번째 합에서는 $j=1$인 항을 따로 떼어 냈다(뒤의 것은 $\ln 1 = 0$이므로 0이다). 이제 $\sum_{j=2}^{n-1}\ln j = \ln((n-1)!)$이고 $(n-1)\ln n = n\ln n - \ln n$이므로

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = n\ln n - (\ln n + \ln((n-1)!)) = n\ln n - \ln(n!),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($n=1$이면 적분 구간의 길이가 0이고, 양변 모두 0이다.)

그림을 이용한 증명 (선택)

폭이 $\ln n$이고 높이가 n인 직사각형의 넓이는 $n\ln n$이다. 이 직사각형에서 계단 **위쪽**에 놓인 부분은 높이가 1인 수평 띠들로 이루어진다. $m=1,\ldots,n$에 대하여 높이 $m-1$과 m 사이의 띠는 $x=0$부터 $x=\ln m$까지 뻗어 있는데, 이는 $[\mathrm{e}^x] < m$인 것이 정확히 $x < \ln m$일 때이기 때문이다. 이 띠의 넓이는 $\ln m$이므로, 계단 위쪽 영역의 넓이는 $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$이다. 이를 $n\ln n$에서 빼면 같은 결과를 다시 얻는다. 이것은 x 대신 y에 대하여 적분하는 것의 이산적인 형태이다.

검산

$n=2$이면 계단은 높이 1, 폭 $\ln 2$인 직사각형 하나이고, 공식은 $2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$를 준다. $n=4$이면 공식은 $4\ln 4 - \ln 24 \approx 2.3671$을 준다. 중점 공식(midpoint rule)으로 $\int_0^{\ln 4}[\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$를 계산하면 소수점 아래 다섯째 자리까지 일치하며, 8 이하의 모든 n에 대해서도 마찬가지이다. 또한 계단이 곡선 아래에 놓이므로 답은 $\int_0^{\ln n}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = n-1$보다 작아야 한다. 실제로 $n=4$일 때 $2.37 < 3$이다.

흔한 실수

- 높이 k인 계단의 폭을 $\ln(k+1) - \ln k$가 아니라 (앞 문항을 그대로 따라) 1로 놓는 실수.
- 계단을 높이 0에서 시작하는 실수. $0 \le x < \ln n$에서는 $\mathrm{e}^x \ge 1$이므로 가장 낮은 계단의 높이는 1이다.

- 첨자를 잘못 옮겨 $(n-1)\ln n$ 항을 놓치거나, 이 항이 $\ln((n-1)!)$과 합쳐져 $\ln(n!)$이 되어야 한다는 점을 알아채지 못하는 실수.

STEP 너머

계단이 $y = \mathrm{e}^x$ 아래에 놓이므로 적분값은 $n-1$보다 작고, 이를 정리하면 $\ln(n!) > n\ln n - n + 1$이다. 같은 방식으로 계단을 위에서 어림하면 스털링 공식(Stirling's formula) $\ln(n!) \approx n\ln n - n$으로 나아갈 수 있는데, 이는 해석학, 확률론, 조합론에서 핵심적인 어림식이다. 직사각형의 합을 띠의 합으로 바꾸는 것은 또한 "부분 합산(summation by parts)"의 한 예이며, 이것은 부분적분(integration by parts)의 이산적인 사촌이다. 계단 함수의 적분을 엄밀한 토대 위에 세우는 다음 단계로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.