풀이

STEP I 2000, 문제 2

순수수학 • 이항전개의 계수

STEP I 2000, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s1-q2

핵심 아이디어

분수 꼴의 항이 있는 두 이항식을 전개한 다음 차수가 맞는 거듭제곱을 찾아다니는 것은 번거롭다. 먼저 x의 음의 거듭제곱을 묶어 내어 각 괄호가 x의 한 거듭제곱(x^6 또는 x^2)에 대한 다항식(polynomial)이 되도록 하는 편이 훨씬 깔끔하다. 그러면 인수분해(factorisation) $x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$ 덕분에 두 번째 곱이 사실은 첫 번째 곱이 모양만 바꾼 것임이 드러나므로, "이를 이용하여(hence)" 부분은 거의 공짜로 얻어진다.

풀이

첫 번째 전개

각 괄호에서 x의 가장 낮은 거듭제곱을 묶어 내면

$$\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)^5=\left(\frac{x^6-1}{x^2}\right)^5=x^{-10}\left(x^6-1\right)^5,$$
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^6=x^{-6}\left(x^2-1\right)^6.$$

이다. 따라서 전체 식은 $x^{-16}P(x)$이고, 여기서

$$P(x)=\left(x^6-1\right)^5\left(x^2-1\right)^6.$$

이다. 그러므로 원래 전개식에서 x^n의 계수(coefficient)는 다항식 $P(x)$에서 x^{n+16}의 계수와 같다.

이항정리(binomial theorem)에 의해

$$(x^6-1)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(-1)^{5-j}x^{6j},\qquad (x^2-1)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}x^{2k},$$

이므로, $P(x)$에서 x^m의 계수는 $6j+2k=m,\ 0\le j\le 5,\ 0\le k\le 6$을 만족하는 모든 순서쌍에 대하여

$$\binom{5}{j}(-1)^{5-j}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}$$

를 더한 값이다.

x^{-12}의 계수. $m=-12+16=4$, 즉 $6j+2k=4$가 되어야 한다. $6j\le 4$이므로 $j=0$일 수밖에 없고, 가능한 순서쌍은 $(j,k)=(0,2)$ 하나뿐이다. 따라서

$$\binom{5}{0}(-1)^5\cdot\binom{6}{2}(-1)^4=(-1)(15)=-15,$$

이고, 이는 구하려던 값이다.

x^2의 계수. 이번에는 $m=2+16=18$이므로 $6j+2k=18$, 즉 $k\le 6$인 조건에서 $3j+k=9$이다. 따라서 $j=1,2,3$이 가능하다.

(j,k)	$(x^6-1)^5$에서	$(x^2-1)^6$에서	곱
$(3,0)$	$\binom{5}{3}(-1)^2=10$	$\binom{6}{0}(-1)^6=1$	10
$(2,3)$	$\binom{5}{2}(-1)^3=-10$	$\binom{6}{3}(-1)^3=-20$	200
$(1,6)$	$\binom{5}{1}(-1)^4=5$	$\binom{6}{6}(-1)^0=1$	5

그러므로 x^2의 계수는 $10+200+5=215$이다.

> **생각해 보기** 왜 $j=0$이나 $j=4$는 x^{18}에 기여할 수 없을까?

$j=0$이면 $k=9$, $j=4$이면 $k=-3$이어야 하는데, 둘 다 $0\le k\le 6$의 범위에 들지 않는다. 여기서는 순서쌍 하나를 빠뜨리거나(또는 없는 것을 만들어 내기) 쉬우므로, 가능한 경우를 체계적으로 나열하는 것이 좋다.

두 번째 전개

> **생각해 보기** x^4+x^2+1은 앞부분과 무슨 관계가 있을까?

x^6-1을 x^2에 대한 세제곱의 차(difference of cubes)로 보았을 때 나오는 나머지 인수가 바로 이것이다.

$$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1).$$

$(x^2-1)^{11}$을 $(x^2-1)^5(x^2-1)^6$으로 나누어 쓰면

$$(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5 = [(x^2-1)(x^4+x^2+1)]^5(x^2-1)^6 = (x^6-1)^5(x^2-1)^6 = P(x).$$

이다. 따라서 두 번째 전개식은 정확히 $P(x)$이고, 이는 첫 번째 전개식에 x^{16}을 곱한 것이다.

x^4의 계수. 이는 $P(x)$에서 x^4의 계수이며, 앞에서 이미 구하였다(첫 번째 전개식의 x^{-12}에 대응한다). 그 값은 -15이다.

x^{38}의 계수. 이는 $6j+2k=38$, 즉 $j\le 5$, $k\le 6$인 조건에서 $3j+k=19$에 대응한다. $k\le 6$이므로 $3j\ge 13$이어야 하고, 따라서 $j=5$, $k=4$이다. 그러면

$$\binom{5}{5}(-1)^0\cdot\binom{6}{4}(-1)^2 = 15.$$

이다. 그러므로 x^{38}의 계수는 15이다.

세지 않고도 이를 알아보는 깔끔한 방법이 있다. P의 차수(degree)는 $30+12=42$이고, x를 $1/x$로 바꾸면

$$x^{42}P(1/x) = (1-x^6)^5(1-x^2)^6 = (-1)^{11}P(x) = -P(x).$$

를 얻는다. 계수를 비교하면 P에서 x^{42-m}의 계수는 x^m의 계수에 마이너스를 붙인 것이다. $m=4$로 두면 x^{38}의 계수는 $-(-15)=15$이고, 앞의 결과와 일치한다.

검산

- $P(x)$에 $x=1$을 대입하면 0이 되므로, P의 모든 계수의 합은 0이다. 완전히 전개했을 때 빠르게 확인해 볼 수 있는 방법이다.
- 두 곱을 컴퓨터로 (계수의 목록으로) 정확히 전개해 보았다. 첫 번째에서 x^{-12}의 계수는 -15, x^2의 계수는 215였고, 두 번째에서 x^4의 계수는 -15, x^{38}의 계수는 15였다. 또한 두 번째 곱의 차수가 42이며 첫 번째 곱에 x^{16}을 곱한 것과 같음을 확인하였다.
- 임의의 유리수 x 값에서 원래 식의 값을 계산하면 구한 전개식의 값과 정확히 일치한다.

흔한 실수

- 부호 오류: 선택한 거듭제곱이 x^{6j}와 x^{2k}일 때 항의 부호는 $(-1)^{5-j}(-1)^{6-k} = -(-1)^{j+k}$이지 $(-1)^{j+k}$가 아니다. 잘못된 것을 쓰면 모든 답의 부호가 뒤집힌다.
- x^2의 계수에서 $(1,6)$이나 $(3,0)$ 항을 빠뜨려 200 또는 205를 얻는 경우.

- 인수분해를 알아채지 못하고 $(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5$을 직접 전개하는 경우: 가능은 하지만 길고 실수하기 쉽다.

STEP 너머

합들의 곱을 하나의 합으로 쓰고 x의 한 거듭제곱을 골라내는 것은 **생성함수**(generating functions)의 바탕이 되는 아이디어이다. 곱의 한 계수는 부분들로부터 어떤 합계를 만드는 방법의 수를 세는데, 이는 위에서 순서쌍 (j,k)를 센 것과 정확히 같다. 대칭성 $x^{42}P(1/x) = -P(x)$는 P가 (반)**회문** 다항식(palindromic polynomial)임을 말해 준다. 이러한 다항식은 원분다항식(cyclotomic polynomials)과 단위근(roots of unity)을 연구할 때 등장하며, x^6-1은 그 첫 번째 예이다. 이런 방향의 문제를 더 원한다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*가 좋은 다음 단계이며, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 다항식의 인수분해를 제대로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.