풀이

STEP I 2000, 문제 11

역학 • 사다리의 마찰 평형

> **STEP I 2000, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q11

핵심 아이디어

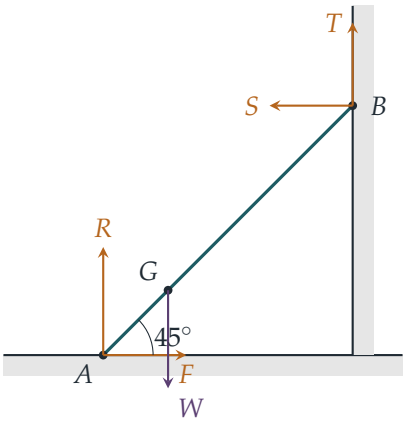
이 문제는 양 끝에 마찰이 있는 사다리 문제이다. "A와 B 모두에서 한계 상태"라는 조건은 모든 마찰력을 수직항력으로 나타내 주므로, 두 방향으로 힘을 분해한 두 식만으로 네 접촉력이 모두 결정된다. 그러면 모멘트 식은 조건이 하나 더 많은 셈이 된다. 이 식은 우연히 성립하거나, 성립하지 않거나 둘 중 하나이다. 첫 번째 부분에서는 이 식이 성립하지 않음을 보인다. 두 번째 부분에서는 추가 질량의 위치를 미지수로 두고 이 식이 성립하도록 만든다.

풀이

모형과 식

막대를 강체 막대(rigid rod)로 모형화하고, 그 무게 $W = 5g\,\mathrm{N}$이 G에 작용한다고 하자. A(바닥)와 B(벽)에서의 접촉은 모두 거칠다. 작용하는 힘은 다음과 같다.

- A에서: 위쪽으로 향하는 수직항력(normal reaction) R와 수평 방향의 마찰력(friction) F;
- B에서: 벽에서 멀어지는 수평 방향의 수직항력 S와 연직 방향의 마찰력 T(위쪽을 양의 방향으로 잡으므로 $T < 0$이면 아래쪽을 뜻한다);
- G에서 아래쪽으로 작용하는 무게 W.



수평 방향의 힘은 F와 S뿐이고, $S \geq 0$은 막대를 벽에서 밀어낸다. 따라서 F는 벽 쪽으로 작용해야 하며

$$F = S. \tag{1}$$

이다. 연직 방향으로 분해하면

$$R + T = W. \tag{2}$$

이다. A에 대한 모멘트(moment)를 구하기 위해 $AB = 0.81$, $c = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$로 두자. 그러면 B는 A로부터 수평 거리 $0.81c$, 높이 $0.81c$인 곳에 있고, G는 A로부터 수평 거리 $0.21c$인 곳에 있다. 시계 방향과 반시계 방향의 모멘트를 비교하면

$$S\,(0.81c) + T\,(0.81c) = W\,(0.21c),$$

이고, c를 약분하면

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W. \tag{3}$$

을 얻는다. 바로 여기서 45°가 도움이 된다. 모든 항에서 인수 c가 약분되기 때문이다.

양 끝에서 동시에 마찰이 한계 상태일 수는 없다

양 끝에서 마찰이 한계 상태(limiting)라고 가정하자. 그러면 $F = 0.2R$이고 $|T| = 1.0\,S = S$이다.

> **생각해 보기** B에서의 마찰력이 한계 상태일 때, 그 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

자연스러운 경우는 막대가 A는 벽에서 멀어지고 B는 아래로 미끄러지려는 상황이므로 $T = +S$이다. 빠짐없이 확인하기 위해 두 부호를 모두 따져 본다.

$T = S$인 경우. (1)에서 $S = F = 0.2R$이고, (2)에서 $R + 0.2R = W$이다. 따라서 $R = \frac{5}{6}W$,

$S = T = \frac{1}{6}W$이다. 그러면 (3)의 좌변은

$$0.81\left(\tfrac{1}{6}W + \tfrac{1}{6}W\right) = 0.27\,W \neq 0.21\,W.$$

이다. 따라서 모멘트 식이 성립하지 않는다.

$T = -S$인 경우. (3)의 좌변은 0이지만 우변은 $0.21W > 0$이므로 불가능하다.

두 경우 모두 막대는 평형(equilibrium) 상태에 있을 수 없다. 따라서 A와 B 모두에서 마찰이 한계 상태일 수는 없으며, 이것이 보이려던 것이다.

(한계 상태가 아닌 경우에는 평형이 분명히 가능하다. 예를 들어 $T = S = \frac{7}{54}W$는 (3)을 만족하고 $R = \frac{47}{54}W$를 주며, 이때 $F = S \leq 0.2R$이다.)

P에 질량 추가하기

$AP = x\,\mathrm{m}$라 하자. 추가된 무게도 $W = 5g\,\mathrm{N}$이고 P에 작용하므로 전체 무게는 $2W$이다. 식 (1)과 (2)는

$$F = S, \qquad R + T = 2W,$$

가 되고, A에 대한 모멘트 식에는 항 $W\,(xc)$가 더해진다. c를 약분하면 이 식은

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W + x\,W. \tag{4}$$

가 된다. 이제 양 끝에서 마찰이 한계 상태이다. $T = -S$인 경우는 이번에도 불가능하다. 그러면 (4)의 좌변은 0이지만 우변은 양수이기 때문이다. 따라서 $T = S$이고 $F = 0.2R$이므로

$$S = 0.2R, \qquad R + 0.2R = 2W \quad\Longrightarrow\quad R = \tfrac{5}{3}W, \quad S = T = \tfrac{1}{3}W.$$

이다. 이를 (4)에 대입하면

$$0.81 \times \tfrac{2}{3}\,W = 0.54\,W = 0.21\,W + x\,W,$$

이므로 $x = 0.33$이다. 따라서

$$AP = 0.33\,\mathrm{m}.$$

이다. 이 값은 0과 0.81 사이에 있으므로 P는 막대 위에 있다. P는 G보다(그리고 중점보다) 더 위쪽에 있으므로, 추가 질량은 합쳐진 무게중심(centre of gravity)을 막대 위쪽으로 밀어 올리고, 이는 사다리를 미끄러지게 하는 경향이 있다.

검산

- P에 질량이 있을 때, W를 단위로 한 힘은 $R = \frac{5}{3}$, $F = S = T = \frac{1}{3}$이다. 그러면 $F/R = 0.2$, $T/S = 1$이므로 둘 다 한계 상태이다. 연직 방향으로는 $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$이고, 모멘트는 $0.81 \times \frac{2}{3} = 0.54 = 0.21 + 0.33$을 준다.

- 합쳐진 무게중심은 A로부터 $\frac{1}{2}(0.21 + 0.33) = 0.27\,\text{m}$인 곳에 있다. 이는 첫 번째 부분에서 양 끝의 마찰이 한계 상태가 되기 위해 필요했던 바로 그 위치이다($0.21W$ 대신 $0.27W$). 마찰 계수는 같고 전체 무게만 두 배가 되었으므로 이는 타당하다.
- 질량과 g는 전 과정에서 약분되므로 답은 이들과 무관하다. $g = 9.8$과 실제 45° 모멘트를 써서 수치로 대입해 보면 잔차는 10^{-15} 정도이다.

흔한 실수

- A에서의 마찰력 방향을 반대로 잡는 것. 다른 수평 방향의 힘은 S뿐이므로 F는 벽 쪽을 향해야 한다.
- B에서의 마찰력이 연직 방향이라는 것을 잊는 것. 이 마찰력은 연직 방향 분해에 나타나며, R를 전체 무게보다 작게 만든다.
- G 대신 막대의 중점을 사용하는 것. 이 막대는 균일하지 않다.

STEP 너머

평면 위의 강체는 세 개의 평형 방정식을 주므로, 미지의 접촉력이 네 개인 문제는 **부정정**(*statically indeterminate*)이다. 강체 정역학만으로는 마찰이 양 끝에 어떻게 나뉘는지 알 수 없다. "양 끝에서 한계 상태"라는 조건을 부과하면 식이 두 개 더 생겨 계가 과잉 결정되는데, 바로 이 때문에 첫 번째 부분에는 해가 없다. 공학에서는 접촉부의 탄성을 모형화하여 부정정성을 해결한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 강체 정역학과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.