풀이

STEP I 2000, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP I 2000, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q10

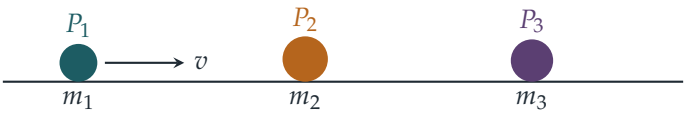
핵심 아이디어

각 충돌에서 두 개의 식을 얻는다. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(Newton's law of restitution)이다. 이 문제에서는 충돌 결과가 일부 주어져 있으므로(P_1은 멈추고, P_3은 속력 v로 떠난다) 속도를 구하는 대신 미지의 계수를 구한다. 충돌이 가능하기 위한 조건은 모든 반발 계수(coefficient of restitution)가 만족해야 하는 유일한 물리적 제약 $0 \leq e \leq 1$에서 나오고, 최종 에너지는 하나 남은 자유로운 질량 m_2의 함수가 된다. 이 함수를 그 조건들이 허용하는 구간에서 최적화한다.

풀이

모형

세 물체를 매끄러운 탁자 위에서 한 직선을 따라 움직이는 입자로 본다. 그러면 수평 방향의 외력이 작용하지 않으므로 각 충돌에서 운동량이 보존된다. P_1이 처음 움직이는 방향을 양의 방향으로 잡는다.



첫 번째 충돌

P_2가 속도 u로 움직이기 시작한다고 하자. P_1이 정지하므로

$$\text{운동량:} \qquad m_1 v = m_2 u \qquad \Longrightarrow \qquad u = \frac{m_1 v}{m_2},$$

$$\text{반발:} \qquad u - 0 = e(v - 0) \qquad \Longrightarrow \qquad e = \frac{u}{v} = \frac{m_1}{m_2}.$$

두 번째 충돌

이제 P_2가 속력 u로 정지해 있는 P_3에 부딪힌다. 충돌 후 P_2의 속도를 w라 하자. P_3의 속도는 v로 주어져 있다. 운동량 보존에 의해

$$m_2 u = m_2 w + m_3 v \quad \Longrightarrow \quad m_1 v = m_2 w + m_3 v \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{(m_1 - m_3)v}{m_2},$$

이다. 여기서 첫 번째 충돌에서 얻은 $m_2 u = m_1 v$를 사용하였다. 반발 법칙(분리 속력 $= e' \times$ 접근 속력)에 의해

$$v - w = e' u.$$

w와 u를 대입하고 양변에 m_2/v(0이 아니다)를 곱하면

$$m_2 - (m_1 - m_3) = e' m_1 \quad \Longrightarrow \quad e' = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

이러한 충돌은 언제 가능한가?

모든 반발 계수는 0과 1 사이에 있다. $0 \le e' \le 1$을 적용하고 $m_1 > 0$을 곱하면

$$0 \le m_2 + m_3 - m_1 \le m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 \le m_2 + m_3 \le 2m_1,$$

이고, 이것이 문제에서 요구한 부등식이다. 따라서 이 부등식은 충돌이 가능하기 위한 필요조건이다.

> ? **생각해 보기** 모든 제약을 다 사용했는가? e는 어떠한가?

$0 \le e \le 1$도 성립해야 한다. $e = m_1/m_2$이므로 이 조건은 정확히 $m_2 \ge m_1$일 때 성립한다. 이 조건은 보이라고 한 결과의 일부는 아니지만(사실 이 조건이 있으면 왼쪽 부등식 $m_2 + m_3 \ge m_1$은 저절로 성립한다), 마지막 부분에서 중요하다. 모두 종합하면, 충돌이 가능할 필요충분조건은

$$m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3.$$

이 구간이 공집합이 아니려면 $m_3 \le m_1$이어야 한다. 그러면 $w = (m_1 - m_3)v/m_2 \ge 0$이므로 두 번째 충돌 후 P_2는 계속 앞으로 움직이거나 멈추며, 정지해 있는 P_1에 다시 돌아와 부딪히지 않는다. 또한 $v - w = e' u \ge 0$이므로 P_2가 P_3를 다시 따라잡지도 않는다. 따라서 충돌은 이 두 번뿐이다.

최종 에너지

마지막에 P_1은 정지해 있고, P_2의 속도는 w, P_3의 속도는 v이므로 최종 운동 에너지(kinetic energy)는

$$E = \tfrac{1}{2}m_2w^2 + \tfrac{1}{2}m_3v^2 = \frac{(m_1-m_3)^2v^2}{2m_2} + \tfrac{1}{2}m_3v^2.$$

m_1, m_3, v가 고정되어 있으므로 m_2만이 $m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$의 범위에서 변할 수 있다. 첫째 항은 음이 아닌 상수를 m_2로 나눈 것이므로 E는 m_2에 대한 감소함수이다($m_1 = m_3$이면 상수인데, 이 경우 구간은 어차피 한 점 $m_2 = m_1$뿐이다).

에너지가 가장 클 때는 $m_2 = m_1$일 때이다(첫 번째 충돌이 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌, 즉 $e = 1$):

$$E_{\max} = \frac{(m_1-m_3)^2v^2}{2m_1} + \frac{m_3v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - m_1m_3 + m_3^2)\,v^2}{2m_1}.$$

에너지가 가장 작을 때는 $m_2 = 2m_1 - m_3$일 때이다(두 번째 충돌이 완전 탄성 충돌, 즉 $e' = 1$):

$$E_{\min} = \frac{(m_1-m_3)^2v^2}{2(2m_1-m_3)} + \frac{m_3v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - 2m_1m_3 + m_3^2 + 2m_1m_3 - m_3^2)v^2}{2(2m_1-m_3)} = \frac{m_1^2v^2}{2(2m_1-m_3)}.$$

검산

- 충돌에서 에너지는 절대 증가할 수 없으므로 $E_{\max} \le \frac{1}{2}m_1v^2$이어야 한다. 이는 $m_1^2 - m_1m_3 + m_3^2 \le m_1^2$, 즉 $m_3(m_3 - m_1) \le 0$과 같고, $m_3 \le m_1$이므로 참이다.
- $E_{\max} - E_{\min} = \dfrac{(m_1-m_3)^3v^2}{2m_1(2m_1-m_3)} \ge 0$임을 확인할 수 있고, $m_1 = m_3$일 때 두 답은 모두 $\frac{1}{2}m_1v^2$와 같다(이때 $m_2 = m_1$이고 두 충돌 모두 탄성 충돌이어서 에너지 손실이 없다).
- 수치로 확인해 보자. $m_1 = 2$, $m_3 = 1$, $v = 1$이면 처음 에너지는 1이고 $E_{\max} = \frac{3}{4}$, $E_{\min} = \frac{2}{3}$이다. m_2를 $[2,3]$에서 조금씩 바꿔 가며 정확한 산술로 계산하면 이 극값들이 그대로 나오고, 이 구간 전체에서 $e, e' \in [0,1]$이 성립하며 구간 밖에서는 성립하지 않음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- (e'만 고려하여) $m_1 - m_3 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$에서 최적화하는 것. 이렇게 하면 처음 에너지 전체인 $\frac{1}{2}m_1v^2$가 "최댓값"으로 나오는데, 이때의 m_2 값에서는 $e = m_1/m_2 > 1$이므로 불가능하다.
- 반발 법칙을 거꾸로 적용하는 것. e배가 되는 것은 **접근** 속력이고, 그 결과가 **분리** 속력이다. 즉 **분리** 속력이 **접근** 속력의 e배이다.

STEP 너머

여기서 본 패턴, 즉 각 제약이 매개변수가 가질 수 있는 구간을 잘라 내고 그 구간에서 단조함수를 최적화하는 것은 제약 최적화(constrained optimisation)의 가장 단순한 경우이며, 이는 선형 계획법(linear programming)과 라그랑주 승수(Lagrange multipliers)로 발전한다. 물리 쪽에서 보면, 충돌은 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 훨씬 깔끔해진다. 이 좌표계에서 반발 계수는 모든 속도에 단순히 $-e$를 곱하는 역할을 하고, 잃어버리는 에너지는 μ를 환산 질량(reduced mass)이라 할 때 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2) \times$ (상대 속력)^{2}이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 충돌을 이러한 관점으로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.