풀이

STEP I 2000, 문제 1

순수수학 • 로그와 첫째 자리 숫자

> **STEP I 2000, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q1

핵심 아이디어

큰 수 N의 첫째 자리 숫자(leading digit)는 전적으로 $\log_{10} N$의 **소수 부분**(*fractional part*)에 의해 결정된다. k가 정수이고 $0 \le f < 1$일 때 $\log_{10} N = k + f$이면 $N = 10^f \times 10^k$이고, N의 첫째 자리 숫자가 d일 필요충분조건은 $\log_{10} d \le f < \log_{10}(d+1)$이다. 따라서 필요한 것은 1부터 9까지 각 숫자의 로그값뿐이며, 이는 $\log_{10} 2$와 $\log_{10} 3$으로부터 얻을 수 있다. 그리고 반올림 오차(rounding error)를 어디까지 허용할 수 있는지 꼼꼼히 살펴보아야 한다.

풀이

이 풀이 전체에서 log는 $\log_{10}$을 뜻한다. 구간 $[0, 1)$은 가능한 첫째 자리 숫자 하나마다 한 조각씩, 모두 아홉 조각으로 나뉜다.



소수 부분 f가 d라고 표시된 조각에 들어가면 첫째 자리 숫자는 d이다.

소문항 (i)

$5 = 10/2$이고 $6 = 2 \times 3$이므로

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.301029996 = 0.698970004 \approx 0.699,$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.301029996 + 0.477121255 = 0.778151251 \approx 0.778,$$

이다(각각 소수점 아래 셋째 자리까지).

이제

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 = 47.7121255.$$

주어진 $\log 3$의 값은 오차가 5×10^{-10} 이내이므로, 이 값의 오차는 5×10^{-8} 이내이다. 따라서 확실히 $47.712 < \log 3^{100} < 47.713$이다. 이를

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 5 \approx 47.699 \quad \text{그리고} \quad \log\left(6 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 6 \approx 47.778,$$

과 비교하면

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) < \log 3^{100} < \log\left(6 \times 10^{47}\right).$$

을 얻는다. 여유(약 0.013과 0.066)는 어떤 반올림 오차보다도 훨씬 크고, log는 순증가 함수(strictly increasing function)이므로

$$5 \times 10^{47} < 3^{100} < 6 \times 10^{47},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 따라서 3^{100}은 $5.\ldots \times 10^{47}$ 꼴이다. 즉 첫째 자리 숫자는 $\boxed{5}$이다(그리고 48자리 수이다).

소문항 (ii)

같은 아이디어를 $\log 2 = 0.301029996$에 적용한다. 이 값의 오차는 많아야 5×10^{-10}이다. 10^n을 곱하면 그 오차에도 10^n이 곱해지므로, 소수 부분이 수직선의 한 조각 안에 안전하게 머무는지 확인해야 한다.

2^{1000}. $\log 2^{1000} = 301.029996$이고, 오차는 많아야 5×10^{-7}이다. 소수 부분은 약 0.030으로 $\log 1 = 0$과 $\log 2 \approx 0.301$ 사이에 있으므로 $2^{1000} = 1.\ldots \times 10^{301}$이고, 첫째 자리 숫자는 $\boxed{1}$이다.

$2^{10\,000}$. $\log 2^{10\,000} = 3010.29996$이고, 오차는 많아야 5×10^{-6}이다. 소수 부분은 0.299955와 0.299965 사이에 있다.

> ? **생각해 보기** 소수 부분 0.29996은 $\log 2 = 0.30103$에 매우 가깝다. 첫째 자리 숫자가 2가 아니라고 확신할 수 있는가?

그렇다. 차이는 $0.30103 - 0.29996 \approx 0.0011$로, 가능한 최대 오차 5×10^{-6}의 이백 배가 넘는다. 따라서 소수 부분은 정말로 $\log 2$보다 작고, $10^{3010} < 2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$이다. (같은 말이지만, $2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$은 $2^{9999} < 10^{3010}$, 즉 $\log 2 < 3010/9999 = 0.3010301\ldots$이라는 뜻이며, 이는 참이다.) 첫째 자리 숫자는 $\boxed{1}$이다.

$2^{100\,000}$. $\log 2^{100\,000} = 30102.9996$이고, 오차는 많아야 5×10^{-5}이므로 소수 부분은 0.99955와 0.99965 사이에 있다. 이것이 수직선의 어느 조각에 속하는지 알아야 하는데, 맨 위 조각은

$$\log 9 = 2\log 3 = 0.954242510.$$

에서 시작한다. $0.954 < 0.99955$이고 $0.99965 < 1$이므로 $9 \times 10^{30102} < 2^{100\,000} < 10^{30103}$이고, 첫째 자리 숫자는 $\boxed{9}$이다.

> **생각해 보기** 오차 때문에 소수 부분이 1을 넘어가서, 이 수가 $1.\ldots \times 10^{30103}$ 꼴이 될 수는 없는가?

그렇게 되려면 $100\,000\log 2$의 참값이 30103 이상이어야 하고, 이를 위해서는 0.0004의 오차가 필요하다. 이는 최대 오차 5×10^{-5}의 여덟 배이다. 따라서 첫째 자리 숫자는 9이고 $2^{100\,000}$은 30 103자리 수이다.

검산

컴퓨터로 정확한 정수 계산을 하면 모든 결과가 확인된다. 3^{100}은 48자리 수이고 $515\ldots$로 시작한다. 2^{1000}은 $107\ldots$로 시작하고(302자리), $2^{10\,000}$은 $199\ldots$로 시작하며(3011자리), $2^{100\,000}$은 $999\ldots$로 시작한다(30 103자리). 방법이 타당한지 빠르게 점검해 보면, $\log 2^{10} = 3.0103$의 소수 부분은 $0.0103 < \log 2$로, $2^{10} = 1024$와 들어맞는다.

흔한 실수

- 로그의 정수 부분(integer part)에서 첫째 자리 숫자를 읽어 내는 것. 정수 부분은 자릿수(정수 부분보다 하나 많다)만 알려 줄 뿐이며, 첫째 자리 숫자는 소수 부분에 담겨 있다.
- 100 000을 곱하면 $\log 2$의 반올림 오차에도 같은 수가 곱해진다는 사실을 잊는 것. 여기서는 소수점 아래 아홉 자리가 딱 충분하며, 그 이유를 밝혀 둘 가치가 있다.
- $f = 0.9996 \approx 1$을 보고 첫째 자리 숫자가 1이라고 결론짓는 것. 소수 부분이 1보다 조금 작다는 것은 그 수가 10의 거듭제곱보다 조금 **작다**는 뜻이므로, 9로 시작한다.

STEP 너머

2^n의 첫째 자리 숫자는 $n\log 2$의 소수 부분이 결정한다. $\log 2$는 무리수(irrational number)이므로 이 소수 부분들은 $[0, 1)$에서 **균등분포**(*equidistributed*)한다(바일(Weyl)의 균등분포 정리). 따라서 2의 거듭제곱 가운데 숫자 d로 시작하는 것의 비율은 $\log(1 + 1/d)$로 수

렴(converge)한다. 이것이 벤포드 법칙(Benford's law)이며, 2의 거듭제곱 가운데 약 30%가 1로 시작한다. 이 이야기의 무리수와 근사 쪽 측면에 관해서는 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)이 읽기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.