9.8 아무도 자기 셔츠를 받지 못한다

학습지

문제

STEP II 2016, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s2-q12

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **잠깐, 직접 해 보기** $n = 3$인 경우를 해 보자. 카드 $1, 2, 3$을 늘어놓는 여섯 가지 순서를 모두 적고, 어떤 카드도 제자리에 있지 않은 것이 몇 개인지 세어 보자. 인내심이 있다면 $n = 4$인 경우도 해 보자(24가지 순서가 있다).

1단계 세 사건에 대한 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)

다루는 내용: 세 사건과 네 사건

> **생각해 보기** $A \cup B$를 하나의 사건으로 보고, C와 함께 두 사건에 대한 공식을 적용한다. 이때 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$가 필요하다.

2단계 확률 구하기

다루는 내용: 소문항 (i)부터 (iii)까지

생각해 보기 카드 i가 i번째 자리에 있다면, 나머지 카드를 배열하는 방법은 몇 가지인가? 카드 i와 카드 j가 모두 제자리에 있다면 어떠한가?

3단계 모두 더하기

다루는 내용: 적어도 한 장의 카드가 제자리에 있는 경우

잠깐, 직접 해 보기 $\mathrm{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$에 대한 공식에서 k개의 사건의 교집합(intersection)을 포함하는 항은 몇 개인가? 각 항의 확률을 곱한 뒤 정리한다. 거의 모든 것이 약분된다.

4단계 정확히 한 장

다루는 내용: 정확히 한 장의 카드가 제자리에 있는 경우

생각해 보기 제자리에 있을 카드를 하나 고른다. 그러면 나머지 $n-1$장의 카드는 어떻게 되어야 하는가? 카드가 $n-1$장일 때 앞에서 구한 답을 이용한다.

숨은 수학

e는 어디서 오는가

급수(series) $\sum (-1)^k/k!$는 지수급수 $e^x = \sum x^k/k!$에 $x = -1$을 대입한 것이다. 따라서 $n \to \infty$일 때

$$d_n \to e^{-1} \approx 0.3679,$$

이고, 정확히 한 장이 일치할 확률도 같은 극한으로 간다. 수렴(convergence)은 놀라울 정도로 빠르다(그림 9.8.1). $1/n!$에서 멈출 때의 오차는 $1/(n+1)!$보다 작으므로, $n = 7$이면 이미 답이 소수점 아래 넷째 자리까지 $1/e$와 일치한다. 사실 n개 대상의 교란순열의 개수 $n!\,d_n$은 정확히 $n!/e$에 가장 가까운 정수이다.

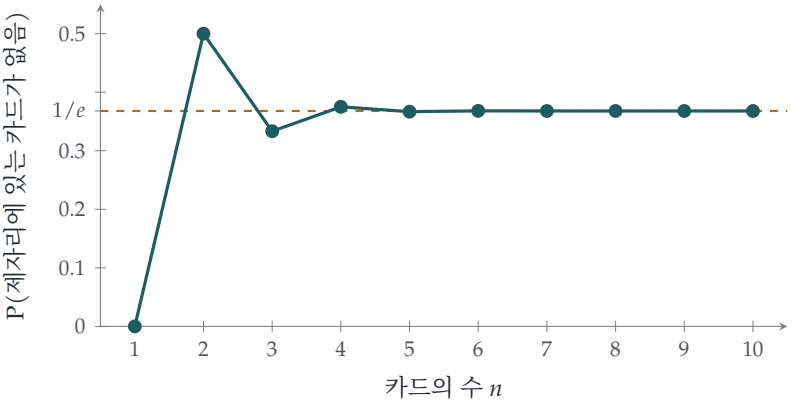

그림 9.8.1 n장의 카드를 무작위로 섞었을 때 어떤 카드도 제자리에 남지 않을 확률. 이 확률은 $1/e$의 위아래를 번갈아 오가며, $n = 6$부터는 이 척도에서 $1/e$와 구별할 수 없다.

일치하는 개수는 푸아송 분포를 따른다

더 많은 것이 성립한다. 제자리에 있는 카드의 수를 N이라 하자. 그러면 각 k에 대하여 $\mathrm{P}(N = k) \to \frac{e^{-1}}{k!}$이다. 즉 일치하는 개수는 극한에서 평균이 1인 **푸아송 분포**(Poisson distribution)를 따른다. 평균이 1인 이유는 계산 없이도 알 수 있다. N은 $E_1, \ldots, E_n$의 지시변수(indicator variable)들의 합이고, 각 지시변수의 기댓값(expectation)은 $\frac{1}{n}$이며, 사건들이 독립이 아니더라도 기댓값은 더할 수 있다. STEP III 2004 Q12(연습문제에 있다)는 분산(variance)도 1임을 보인다. 푸아송 분포는 일어날 가능성이 낮고 거의 독립인 사건이 많을 때마다 나타난다. 교란순열은 그 고전적인 예이며, 12장 Section 12.11의 주제이기도 하다.

Montmort의 *treize* 게임

프랑스 귀족 Pierre Rémond de Montmort는 *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*(1708)에서 운에 좌우되는 게임을 연구하였다. *treize*(열셋) 게임에서 한 사람이 "하나, 둘, 셋, ..."을 외치며 카드 열세 장을 한 장씩 나누어 주는데, 나누어 준 카드가 외친 수와 한 번이라도 일치하면 이긴다. Montmort는 이길 확률을 구하였고, 니콜라우스 베르누이(Nicolaus Bernoulli)와 주고받은 서신을 통해 1713년까지 일반 공식이 확립되었다. 오일러(Euler)는 1753년에 이를 다시 발견하였다. 포함배제의 원리는 나중에 드 무아브르(Abraham de Moivre)가, 그리고 일반적인 형태로는 19세기에 실베스터(James Joseph Sylvester)가 정식화하였다.

더 도전하기

1 **셔츠.** STEP III 2004, 12번 문제 (step.maths.org/questions/04-s3-q12)를 풀어 보자. 이 문제는 자기 셔츠를 입은 선수의 수를 지시변수로 세고, 평균과 분산을 구한 다음, 그 결과를 푸아송 분포와 비교한다.

2 **점화식.** n개 대상의 교란순열의 개수를 D_n이라 하자. 카드 1이 어디로 가는지, 그리고 그 자리에 있던 카드가 1번째 자리로 가는지를 고려하여 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$임을 보여라. 이 식을 $D_3 = 2$, $D_4 = 9$와 대조하여 확인해 보자.

3 **정확히 k장.** 정확히 k장의 카드가 제자리에 있을 확률이 $\frac{1}{k!} d_{n-k}$이고, 이것이 $\frac{e^{-1}}{k!}$로 수렴함을 보여라.

4 **서로소인 정수.** 포함배제를 이용하여 1부터 30까지의 정수 중 2, 3, 5 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는 것의 개수를 세어라. 그 답은 $30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$와 어떤 관계가 있는가?

더 읽을거리

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 포함배제와 일치 문제를 다루는 대학 1학년 교재이다.
- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), Chapter IV. 일치 문제의 다양한 변형을 담은 고전이다.
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 포함배제에 관한 내용이 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/derangements.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com