9.7 같은 거듭제곱의 합

학습지

문제

STEP I 1992, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/92-s1-q5

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 다항식 $\mathrm{p}(x) = \sum c_k x^k$가 $\mathrm{p}(1) = 0$을 만족하면 계수(coefficient)에 대해 무엇을 알 수 있는가? $\mathrm{p}'(1) = 0$이면 어떤가?

1단계 삼중근(triple root)

다루는 내용: 인수 $(1-x)^3$

> ? **생각해 보기** $1 - x^2$과 $1 - x^4$을 할 수 있는 데까지 인수분해(factorise)해 보아라. 모두 합쳐 $1 - x$라는 인수(factor)가 몇 개 나오는가?

2단계 1에서의 도함수(derivative) 값

다루는 내용: $p_0'(1) = 0$과 $p_1'(1) = 0$

잠깐, 직접 해 보기 $p_0(x) = (1-x)^3 q(x)$로 쓰고 곱의 미분법(product rule)으로 미분하여라. p_0'은 $1-x$의 몇 제곱으로 나누어떨어지는가? 그렇다면 $p_1 = x p_0'$은, 그리고 p_1'은 어떠한가?

3단계 계수 읽어 내기

다루는 내용: 두 항등식(identity)

생각해 보기 p_0을 전개하여라. $p_0'(1)$과 $p_1'(1)$을 계수(coefficient) c_k로 나타내어라. $+1$은 어디에 있고 -1은 어디에 있는가?

4단계 인수 하나 더

다루는 내용: 마지막 문항

> **잠깐, 직접 해 보기** 세제곱의 합까지 같아지게 하려면 $1-x$라는 인수가 네 번째로 하나 더 필요하다. p_0에 $1-x^8$을 곱하여라. 0부터 15까지의 계수의 부호를 읽어 내고, 부호에 따라 수들을 두 묶음으로 나누어라.

숨은 수학

투에–모스 수열

$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\cdots$의 계수의 부호는 **투에–모스 수열**을 이룬다. $+$를 0으로, $-$를 1로 쓰면 다음과 같다.

$$0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\ \ldots$$

이 수열은 서로 동치인 세 가지 방식으로 설명할 수 있다.

- **두 배 늘리기:** 0에서 시작하여, 지금까지 얻은 것의 보수(complement, 0과 1을 맞바꾼 것)를 계속 뒤에 붙인다: $0 \to 01 \to 0110 \to 01101001 \to \cdots$.
- **이진법 자릿수:** k번째 항은 k를 이진법(binary)으로 썼을 때 1의 개수가 짝수이면 0, 홀수이면 1이다. (그래서 x^k의 부호가 $(-1)^{\text{이진법으로 쓴 다음 수에 있는 1의 개수: } k}$인 것이다. 곱에서 x^k를 만들려면 k의 이진 표현을 이루는 인수 x^{2^m}들을 골라야 하고, 각 인수가 마이너스 부호를 하나씩 가져온다.)
- **다항식:** 문제에서처럼 $\prod_m (1-x^{2^m})$의 계수이다.

$0, 1, \ldots, 2^N-1$을 투에–모스 수열에 따라 나누면, 모든 $r < N$에 대해 r제곱의 합이 같은 두 집합을 얻는다(그림 9.7.1). 이것이 **프루에–태리–에스콧 문제**(*Prouhet–Tarry–Escott problem*)이다. 즉 $r = 1, \ldots, k$에 대해 r제곱의 합이 같은 서로 다른 두 정수 집합을 찾는 문제이다. Prouhet의 풀이는 2^{k+1}개의 수를 사용한다. 실제로 최소 몇 개의 수가 필요한지 알

아내는 것은 유명한 미해결 문제이다.

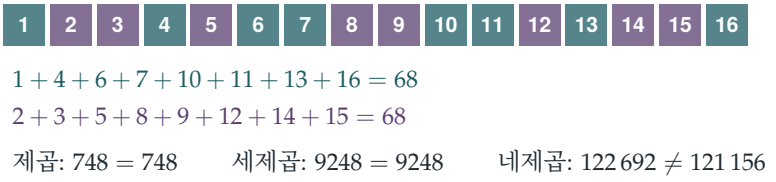

그림 9.7.1 투에–모스 수열에 따라 나눈 1부터 16까지의 수. 두 집합은 합, 제곱의 합, 세제곱의 합이 각각 같지만 네제곱의 합은 같지 않다. 네제곱의 합까지 같게 하려면 1부터 32까지가 필요하다. 색을 왼쪽부터 읽으면 청록–자주–자주–청록, 자주–청록–청록–자주, ...의 패턴이 된다.

가장 공정하게 차례를 정하는 방법

두 아이가 사탕 더미에서 좋은 것부터 번갈아 고른다고 하자. $ABABAB\ldots$ 순서로 번갈아 고르면 A가 매 쌍에서 언제나 더 좋은 사탕을 가져가므로 체계적으로 유리하다. $ABBA$ 순서가 더 공정하고, $ABBABAAB$는 그보다 더 공정하다. 이것이 바로 투에–모스 수열이며, 거듭제곱의 합이 같다는 성질이 정확히 그 이유이다. 사탕의 가치가 위치에 대한 매끄러운 함수로 주어진다면, 그 함수를 다항식으로 전개해 보면 투에–모스 순서가 앞쪽의 주요 항들을 상쇄한다는 것을 알 수 있다. 같은 아이디어가 축구의 승부차기에도 제안되었으며(축구 규칙 제정 기구가 2017년부터 시험한 "$ABBA$" 순서), 테니스 타이브레이크의 서브 순서에도 쓰인다.

Thue, Morse, Euwe

이 수열은 여러 번 거듭 발견되었다. Prouhet가 1851년에 이 수열을 사용했다. Axel Thue는 1912년에 반복 패턴이 없는 수열을 연구하다가 이 수열을 다시 발견했다. 이 수열에는 같은 블록이 세 번 연달아 나타나는 일이 결코 없다("세제곱이 없는(cube-free)" 수열이다). Marston Morse는 1921년에 곡면 위의 측지선(geodesic)을 연구하다가 이 수열을 또다시 발견했다. 그리고 체스 세계 챔피언 Max Euwe는 1929년에 이 수열을 이용하여, 당시 시행되던 반복에 의한 무승부 규칙으로는 무한히 긴 게임을 막을 수 없음을 보였다. 오늘날 이 수열은 **자동 수열**(*automatic sequence*), 즉 n의 이진법 자릿수를 읽는 간단한 기계로 계산되는 수열 이론의 핵심적인 예이다.

더 도전하기

1 **평행이동.** STEP II 2025, 8번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 시험지 묶음, www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip)에 도전해 보라. 합과 제곱의 합이 같아지도록 나눈 것에서, 한 목록을 평행이동하여 결합함으로써 세제곱의 합까지 같아

지는 더 큰 분할을 만드는 방법을 보여 준다.

2 **제곱수의 제곱.** (이 문제도 STEP II, 2025에서 나왔다.) 집합 $A = \{1, 3, 4, 5, 9, 11\}$과 $B = \{2, 6, 7, 8, 10\}$은 합이 같고 제곱의 합도 같다. 모든 양의 정수 n에 대해 $\{n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+11)^2\}$을 합이 같은 두 집합으로 나누어라. (**힌트:** 두 번째 집합에 0을 추가하라.)

3 **평행이동 불변성(translation invariance).** 두 수 집합이 $r = 0, 1, \ldots, k$에 대해 r제곱의 합이 같으면, 모든 원소에 같은 수 c를 더해 얻은 집합들도 그러함을 보여라. 이로부터 문제의 집합 $\{1, \ldots, 15\}$를 임의의 연속한 16개의 정수로 바꾸어도 된다는 것은 왜인가?

4 **공정한 사탕.** 사탕의 가치가 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$이다. $ABABABAB$ 순서와 $ABBABAAB$ 순서에서 A가 얻는 총합을 비교하라.

더 읽을거리

- **Jean-Paul Allouche & Jeffrey Shallit, "The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence"**, *Sequences and Their Applications* (Springer, 1999) 수록. 이 수열이 등장하는 수많은 곳을 개관한 글로, 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Matt Parker, *Things to Make and Do in the Fourth Dimension*** (Penguin). 거듭제곱의 합이 같은 집합을 비롯한 여러 수의 신기한 성질을 다룬다.
- **Joshua Cooper & Aaron Dutle, "Greedy Galois games"**, *American Mathematical Monthly* 120 (2013). 공정한 차례 정하기와 투에–모스 수열을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.7절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/equal-power-sums.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com