9.6 이상한 주사위

학습지

문제

STEP I 1993, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s1-q1

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 첫 번째 주사위에 i가 적힌 면이 p_i개 있고 두 번째 주사위에 j가 적힌 면이 q_j개 있다면, 합이 t가 되도록 던지는 방법은 몇 가지인가?

1단계 양 끝 값

다루는 내용: 새로운 눈 배치 찾기

? **생각해 보기** 두 주사위(dice)를 A와 B라 하고, i가 적힌 면의 개수를 각각 a_i와 b_i라 하자. 합이 2가 나오는 경우는 없다. 이것은 $a_1 b_1$에 대해 무엇을 말해 주는가? 합이 3이 나오는 경우는 두 가지이다. 어떤 곱들이 이 두 경우를 만드는가?

2단계 위로 올라가며 풀기

다루는 내용: 새로운 눈 배치 찾기

잠깐, 직접 해 보기 A에 1이 있다고 하면 $b_1 = 0$이다. (a_1, b_2)에 대해 두 가지 경우가 있다. 합이 4, 그다음 5가 되는 경우에 대한 방정식을 세우고, 각 경우에 대해 풀어라.

3단계 경우 (a)는 성립하지 않는다

다루는 내용: 새로운 눈 배치 찾기

생각해 보기 $a_1 = 2, b_2 = 1$인 경우에 합이 7이 되는 경우에 대한 방정식을 세워라. B에서 5와 6을 적을 수 있는 면은 몇 개 남는가? 그것이 가능한가?

4단계 경우 (b)는 성립한다

다루는 내용: 새로운 눈 배치 찾기

> **생각해 보기** 다른 경우에서는 합이 6과 11이 되는 경우를 이용하고, 합이 12가 나오지 않는다는 사실이 $a_6 b_6 = 0$을 뜻한다는 점도 이용하라. 마지막으로, 구한 주사위로 표 전체가 나오는지 확인하라.

숨은 수학

다항식으로 나타낸 주사위

각 주사위를 다항식으로 나타내되, i가 적힌 면 하나마다 항 x^i를 하나씩 둔다. 보통 주사위는 $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$이고, 문제의 주사위는

$$A(x) = x + x^4 + x^5 + 3x^6, \qquad B(x) = 2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5.$$

이다. 곱하면 면의 각 쌍이 $x^i x^j = x^{i+j}$를 기여하므로, $A(x)B(x)$에서 x^t의 계수는 합 t를 던지는 방법의 수이다. 이것은 다시 한번 Section 9.4의 생성함수(generating function) 아이디어이다. 합의 표는 곱 $A(x)B(x)$일 뿐이며, 앞에서 경우를 나누어 한 추론은 이 곱을 인수분해(factorisation)하는 한 가지 방법이었다.

시커먼 주사위

보통 주사위 두 개의 경우 곱은 $(x + x^2 + \cdots + x^6)^2$이다. 같은 합의 분포를 갖는 주사위 쌍은 $P(x)Q(x) = (x + \cdots + x^6)^2$을 만족하는 다항식 $P(x)$, $Q(x)$를 가져야 한다. 이제 인수분해하면

$$x + x^2 + \cdots + x^6 = x(1 + x)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2),$$

이고, 이 인수들은 (정수 계수 다항식으로) 더 이상 분해할 수 없다. 따라서 P와 Q는 각각 인수 x, $1 + x$, $1 + x + x^2$, $1 - x + x^2$로 만들어져야 하며, 각 인수는 모두 합쳐 두 번씩 나타난다. 세 가지 조건이 선택의 폭을 좁힌다.

- 각 주사위는 면이 6개이므로 $P(1) = Q(1) = 6$이다. 각 인수는 $x = 1$에서 값 $1, 2, 3, 1$을 가지므로, 각 주사위는 $1 + x$ 하나와 $1 + x + x^2$ 하나를 갖는다.
- 0이 적힌 면은 없으므로 $P(0) = Q(0) = 0$이다. 즉 각 주사위는 인수 x를 하나씩 갖는다.
- 남은 자유는 $1 - x + x^2$ 두 개를 어떻게 나누느냐뿐이다. 하나씩 나누면 보통 주사위가 된다. 둘 다 한 주사위에 주면

$$x(1+x)(1+x+x^2) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$
$$x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

이것이 시커먼 주사위 $1,2,2,3,3,4$와 $1,3,4,5,6,8$이며(그림 9.6.1), 이 논증은 이것이 유일한 대안임을 증명한다. 핵심은 다항식도 정수처럼 기약(irreducible) 다항식으로 유일하게 인수분해된다는 사실이다. 정수론(number theory)과 조합론(combinatorics)이 여기서 만난다.

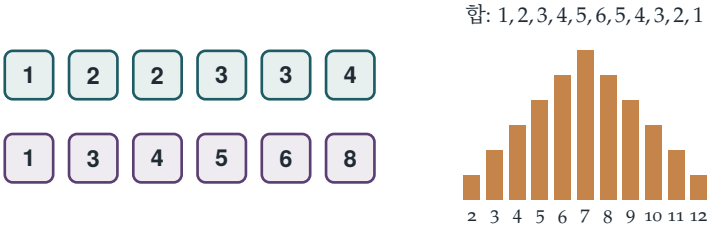


그림 9.6.1 시커먼 주사위. 함께 던지면 2부터 12까지의 모든 합이 보통 주사위 두 개와 정확히 같은 빈도로 나온다(오른쪽). 합 2가 나오는 방법은 한 가지, 합 3은 두 가지이고, 이렇게 계속하여 합 7은 여섯 가지이다.

확률생성함수

확률에서는 같은 아이디어가 **확률생성함수**(*probability generating function*)로 나타난다. 값 $0, 1, 2, \ldots$를 갖는 확률변수(random variable) X에 대하여 $\mathrm{G}(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum \mathrm{P}(X = k)t^k$이고, 서로 독립(independent)인 X와 Y에 대하여 $\mathrm{E}(t^{X+Y}) = \mathrm{E}(t^X)\mathrm{E}(t^Y)$이다. 독립인 확률변수의 합은 생성함수의 곱에 대응한다. STEP III 2003 Q14(연습문제에 있다)는 이 방법으로 시커먼 주사위를 찾으며, Section 9.13에서는 이와 관련된 논증으로 두 주사위에 어떻게 무게를 실어도 모든 합이 같은 확률로 나오게 할 수 없음을 보인다.

더 도전하기

1 **사면체 주사위.** STEP III 2003, 14번 문제 (step.maths.org/questions/03-s3-q14)를 풀어 보라. 이 문제는 면이 네 개인 주사위에 대해 시커먼의 질문을 던진다. (힌트: $x + x^2 + x^3 + x^4 = x(1+x)(1+x^2)$.)

2 **표 확인하기.** $(x + x^4 + x^5 + 3x^6)(2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5)$를 전개하여 문제의 표와 맞는지 확인하라.

3 **주사위 세 개.** 모두 표준 주사위는 아니면서 양의 정수가 적힌 육면체 주사위 세 개로, 합의 분포가 표준 주사위 세 개와 같은 것이 있는가? (**힌트:** 이제 $(x + \cdots + x^6)^3$의 인수에는 $1 - x + x^2$가 세 개 들어 있다.)

4 **동전과 팔면체.** $1, \ldots, 8$이 적힌 팔면체 주사위와 $1, 2$가 적힌 이면 "주사위"(동전)가 있다. 같은 합의 분포를 유지하면서 수를 다르게 적을 수 있는가?

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*** (Mathematical Association of America). 시커먼 주사위에 관한 칼럼이 실려 있다.
- **Joseph Gallian & David Rusin, "Cyclotomic polynomials and nonstandard dice"**, *Discrete Mathematics* 27 (1979). 면의 개수가 임의인 주사위에 대한 일반 이론을 다룬다.
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (온라인에서 무료로 볼 수 있다), 1장.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.6절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/strange-dice.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com