9.5 거스름돈 만들기

학습지

문제

STEP I 1997, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s1-q1

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 2p와 1p 동전만으로 n펜스를 만드는 방법은 몇 가지인가? 왜 그 답은 2p 동전을 몇 개 쓰는지에만 의존하는가?

1단계 10펜스

다루는 내용: 10펜스 만들기

? **생각해 보기** 가장 큰 동전부터 기준으로 나누어 생각한다. 10p 동전을 쓰는 경우와 쓰지 않는 경우가 있다. 쓰지 않는다면 5p 동전은 몇 개까지 쓸 수 있는가? 그 다음 나머지 금액을 2p와 1p 동전으로 만드는 방법의 수를 센다.

2단계 한 단계씩 쌓아 올리기

다루는 내용: 20펜스 만들기

잠깐, 직접 해 보기 5p, 2p, 1p 동전으로 n펜스를 만드는 방법의 수를 $b(n)$이라 하자. 5p 동전의 개수를 정하고, $b(n)$을 2p와 1p 동전만 쓰는 경우의 수들의 합으로 나타낸다. $n = 0, 5, 10, 15, 20$에 대한 표를 만든다.

생각해 보기 이제 앞에서 구한 b의 값을 이용하여 같은 방법으로 10p 동전을 포함시킨다.

3단계 20펜스

다루는 내용: 20펜스 만들기

생각해 보기 마지막으로 20p 동전을 쓰는 경우와 쓰지 않는 경우로 나눈다. 모두 더한다.

숨은 수학

등비급수로서의 동전

이 문제를 대수로 바꾸어 주는 아이디어는 다음과 같다. 사용하는 5p 동전의 개수는 $0, 1, 2, \ldots$일 수 있고, 이는 각각 $0, 5, 10, \ldots$펜스를 기여한다. 이것을 다음 급수로 기록한다.

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

각 동전에 대해 똑같이 한 다음 모두 곱한다.

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \sum_{n} w(n) x^n.$$

괄호를 전개하면 각 항 x^n은 각 괄호에서 항을 하나씩, 즉 각 동전의 개수를 하나씩 골라 총액이 n이 되게 할 때 생긴다. 따라서 x^n의 계수 $w(n)$은 정확히 n펜스를 만드는 방법의 수이다. 2단계의 표는 이 곱을 괄호 하나씩 전개한 것에 불과했다. 이것이 Section 9.4에서 다룬 생성함수(generating function)의 아이디어이며, 그 위력이 드러나는 곳이 바로 곱셈이다. 생성함수의 곱은 선택들의 조합을 센다.

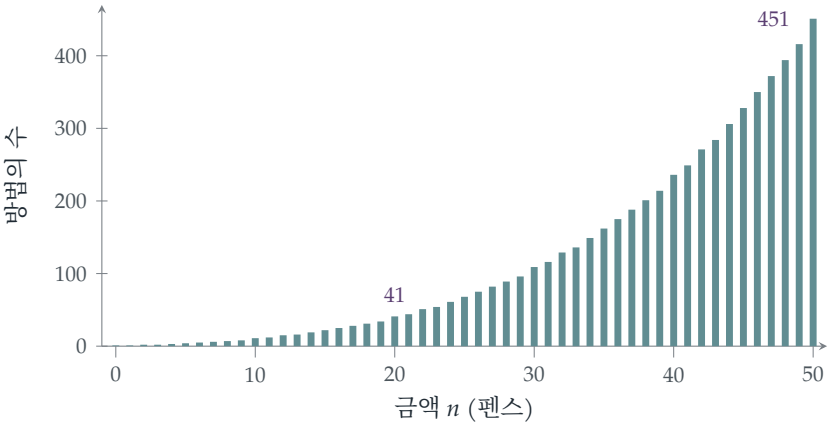

그림 9.5.1 1p, 2p, 5p, 10p, 20p, 50p 동전으로 n펜스를 만드는 방법의 수. 5와 10의 배수에서 생기는 도약은 새 동전을 처음 쓸 수 있게 되는 지점을 보여 준다. 동전이 여섯 종류일 때 방법의 수는 대략 n^5처럼 증가한다. 일반적으로는 차수가 동전 종류의 수보다 하나 작은 다항식처럼 증가한다.

분할

모든 자연수를 동전으로 쓸 수 있다면 어떻게 될까? 그러면 순서를 무시하고 n을 양의 정수들의 합으로 나타내는 방법의 수가 **분할수**(partition number) $p(n)$이다. 예를 들어 $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$이므로 $p(4) = 5$이다. 오일러는 1748년에

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots},$$

임을 알아내고, 이를 이용하여 놀라운 항등식들을 발견했다. 그 가운데 하나는 다음과 같다. n을 **서로 다른** 부분들의 합으로 나타내는 방법의 수는 **홀수인** 부분들의 합으로 나타내는 방법의 수와 같다. (생성함수를 쓰면 증명은 대수 계산 한 줄이다. 연습문제에서 직접 해 보라.)

하디, 라마누잔 그리고 $p(200)$

분할수는 빠르게 커진다. $p(10) = 42$, $p(100) = 190\,569\,292$이다. 1918년 하디(G. H. Hardy)와 라마누잔(Srinivasa Ramanujan)은 $p(n)$에 대한 놀라운 공식을 발견했는데, 이는 무한급수로서 그 첫째 항은 다음과 같다.

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

이 공식을 검증하기 위해 퍼시 맥마흔(Percy MacMahon)은 오일러의 항등식을 이용하여 손으로 $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$을 계산했다. 하디와 라마누잔의 급수에서 처음 몇 항만으로도 오차가 1보다 작은 정확한 답이 나왔다. 라마누잔은 또한 $p(5n+4)$는 항상 5로,

$p(7n+5)$는 7로, $p(11n+6)$은 11로 나누어떨어진다는 것도 발견했다. 이런 패턴이 더 이상 없는 이유를 설명하는 데에는 21세기까지 시간이 걸렸다.

더 도전하기

1 **두 종류의 6.** STEP II 2012, 1번 문제 (step.maths.org/questions/12-s2-q1)에 도전해 보라. 이 문제는 등비급수의 곱으로 개수를 센다. 마지막에, 그 계수들이 답이 되는 동전 세기 문제를 하나 설명해 보라.

2 **서로 다른 부분과 홀수 부분.** $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$이 서로 다른 부분들로의 분할에 대한 생성함수임을 보여라. $1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$를 이용하여 이것이 $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$와 같음을 보이고, 오일러의 정리를 이끌어 내라. $n=6$일 때 확인해 보라.

3 **공식.** 1p, 2p, 5p 동전만으로 n펜스를 만드는 방법의 수가 $\frac{(n+4)^2}{20}$에 가장 가까운 정수임을 보여라. (먼저 작은 n에 대해 확인해 보라.)

4 **순서가 중요할 때.** 순서를 고려하여 1p와 2p 동전을 투입구에 하나씩 넣어 n펜스를 만드는 방법은 몇 가지인가? (이 수열은 이전에 본 적이 있다.)

더 읽을거리

- **George Andrews & Kimmo Eriksson, *Integer Partitions*** (Cambridge University Press). 학부생을 위한 짧고 읽기 쉬운 입문서.
- **George Pólya, "On picture-writing"**, *American Mathematical Monthly* 63 (1956). 1달러를 바꾸는 문제(방법은 292가지이다)를 이용하여 생성함수를 설명한 포여(Pólya)의 고전적인 글.
- **Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity*** (Abacus). 라마누잔의 생애와 하디와의 협업을 다룬 책.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.5절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/making-change.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com