# 9.4 함수로서의 수열

학습지

**문제**

**STEP I 2016, 8번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s1-q8

## 힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

**생각해 보기** 생성함수가 $\dfrac{1}{1-x}$인 수열은 무엇인가? $\dfrac{1}{1-2x}$는 어떤가? 생성함수에 $x$를 곱하면 수열은 어떻게 되는가?

### 1단계 자연수(natural numbers)와 삼각수(triangle numbers)

다루는 내용: 소문항 (i)

**생각해 보기** 이항급수(binomial series)를 이용하여 $(1-x)^{-2}$와 $(1-x)^{-3}$을 전개하라. 각각에서 $x^n$의 계수(coefficient)는 무엇인가? $x$를 곱하면 어떤 일이 일어나는가?

**잠깐, 직접 해 보기** $n^2$을 $n$과 $\frac{1}{2}n(n+1)$을 이용하여 나타내라. 생성함수(generating function)는 수열(sequence)과 똑같은 방식으로 더해진다.

### 2단계 점화식(recurrence)이 방정식이 된다

다루는 내용: 소문항 (ii)(a)

**잠깐, 직접 해 보기** $u_n = ku_{n-1}$의 양변에 $x^n$을 곱하고 모든 $n \geq 1$에 대하여 더하라. 좌변의 합에는 $n = 0$인 항이 빠져 있다는 점에 유의하면서 양변을 각각 $\mathrm{f}(x)$로 나타내라.

### 3단계 피보나치 수(Fibonacci numbers)

다루는 내용: 소문항 (ii)(b)

**생각해 보기** $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$에 대해서도 같은 방법을 적용하되, $n \geq 2$에 대하여 더하라. 각 합에서 앞쪽의 어떤 항들이 빠져 있는가? 그런 다음 $u_0 = 0$과 $u_1 = 1$을 이용하라.

**4단계** $1/89$**의 비밀 풀기**

다루는 내용: 문제 너머

**생각해 보기** 소문항 (ii)(b)에서 구한 답에 $x = \frac{1}{10}$을 대입하라. 무엇을 알 수 있는가?

## 숨은 수학

### 생성함수에서 공식으로

생성함수는 수열을 담아 두기만 하는 것이 아니라, 수열을 구해 낼 수도 있다. 분모는 $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$로 인수분해되는데, 여기서 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$와 $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$는 $t^2 = t + 1$의 근이다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\right),$$

이고, 각 분수를 등비급수로 전개하면

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

이것이 비네(*Binet*) 공식이다. $|\psi| < 1$이므로 둘째 항은 매우 작고, 따라서 $F_n$은 $\varphi^n/\sqrt{5}$에 가장 가까운 정수이며, 연속한 피보나치 수의 비는 황금비(golden ratio)로 수렴한다(Section 2.2의 주제이다). 같은 방법으로 상수계수 선형 점화식(linear recurrence with constant coefficients)을 모두 풀 수 있다. 연습문제에 STEP I 2004의 예가 있다.

### 생성함수가 그토록 쓸모 있는 이유

진짜 힘은 곱셈에서 드러난다. 곱 $f(x)g(x)$에서 $x^n$의 계수는 $\sum_k u_k v_{n-k}$인데, 이는 $n$을 두 부분으로 나누는 모든 방법에 대하여 더한 것이다. 두 조각으로 이루어진 것을 셀 때 정확히 필요한 것이 이것이다. 다음 두 절에서는 이를 이용하여 거스름돈을 만드는 방법의 수를 세고(Section 9.5), 보통 주사위와 합의 분포가 같은 이상한 눈의 주사위를 찾는다(Section 9.6).

확률에서는 같은 아이디어로 **확률생성함수**(*probability generating function*)를 얻는데, 이는 독립 확률변수(independent random variables)의 합을 곱으로 바꾼다.

**드무아브르, 오일러, 라플라스**

아브라함 드무아브르(Abraham de Moivre)는 1720년대에 생성함수를 사용하여 선형 점화식을 풀었는데, 본질적으로 위의 방법이었다. 레온하르트 오일러(Leonhard Euler)는 1748년에 자연수의 분할(partitions)을 연구하는 데 생성함수를 사용했고, 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace)는 생성함수를 그의 저서 *Théorie analytique des probabilités*(확률의 해석적 이론, 1812)의 토대로 삼았다. 20세기에 생성함수는 조합론의 중심이 되었고, 오늘날에는 해석적 방법(생성함수를 복소변수(complex variable)의 함수로 연구하는 것)으로 정확히 풀기에는 너무 복잡한 세기 문제에 대해서도 정밀한 추정을 얻는다.

## 더 도전하기

1 **한 번에 두 자리씩.** STEP II 2022, 3번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 시험지 묶음, www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip)을 풀어 보라. 이 문제는 $\frac{1}{89}$의 소수 전개가 왜 피보나치 수로 시작하는지 설명하고, 소수 표현에서 이 패턴이 두 자리씩 나타나는 분수를 구하게 한다.

2 **점화식 풀기.** STEP I 2004, 7번 문제 (step.maths.org/questions/04-s1-q7)을 풀어 보라. 이 문제는 생성함수와 부분분수로 선형 점화식을 푼 다음, 그 방법을 거꾸로 적용한다.

3 **수 세기.** $\frac{1}{9801} = 0.00\,01\,02\,03\,04\ldots$임을 보여라. 여기서 두 자리씩 끊은 묶음이 하나씩 커진다. 이 패턴은 어디에서 처음 깨지는가? 그 이유는 무엇인가?

4 **제곱의 합.** $\frac{1}{1-x}f(x)$가 부분합(partial sums) $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$의 생성함수인 이유를 설명하라. 이것과 소문항 (i)의 답을 이용하여 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$의 공식을 구하라.

## 더 읽을거리

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (A K Peters; 온라인 무료). 고전적인 입문서이다. 이 절을 읽은 뒤에는 1장이 안성맞춤이다.
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 7장.
- **Philippe Flajolet & Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics*** (Cambridge University Press; 온라인 무료). 대학 1학년 수준을 훨씬 넘어서지만, 첫 몇 쪽에서 이 분야가 어디

로 이어지는지 볼 수 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.4절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/generating-functions.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com