9.3 울타리 기둥 색칠하기

학습지

문제

STEP II 1995, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q2

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 원 모양으로 놓인 기둥 3개와 4개를 칠하는 방법의 수를 세어 보아라. $3 \times 2^{n-1}$은 실제보다 많이 세는가? 그렇다면 얼마나 많이 세는가?

1단계 두 종류의 색칠

다루는 내용: $r_{n+1} = s_n$인 이유와 $r_n + s_n$ 구하기

잠깐, 직접 해 보기 첫 번째 말뚝과 마지막 말뚝이 빨간색인 $n+1$개의 말뚝의 색칠(colouring)을 하나 생각한다. 말뚝 n은 어떤 색일 수 있는가? 마지막 말뚝을 없애면 n개의 말뚝에 대한 어떤 종류의 색칠이 남는가? 거꾸로 되돌아갈 수도 있는가?

생각해 보기 $r_n + s_n$은 첫 번째 말뚝이 빨간색인 n개의 말뚝의 모든 색칠의 개수를 센다. 첫 번째 이후의 각 말뚝에 대해 선택지는 몇 가지인가?

2단계 귀납법으로 공식 증명하기

다루는 내용: 귀납법(induction)

생각해 보기 $n = 1$일 때를 확인한다. 그다음 r_n에 대한 공식과 함께 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$을 이용하고 식을 정리한다.

3단계 원형 배치

다루는 내용: 원형으로 놓인 말뚝

> **잠깐, 직접 해 보기** 말뚝 1을 빨간색으로 고정하고 말뚝 n과 말뚝 1 사이에서 원을 끊어 말뚝들이 일렬로 놓이게 한다. 일렬 색칠은 어떤 추가 조건을 만족해야 하는가? r_n과 s_n 중 어느 것이 그러한 색칠의 개수를 세는가? 말뚝 1은 몇 가지 색을 가질 수 있는가?

숨은 수학

채색 다항식

기둥과 그 이웃 관계는 **그래프**(graph)를 이룬다. 일렬로 놓인 경우는 경로(path), 원 모양인 경우는 사이클(cycle)이다. **적절한 색칠**(proper colouring)이란 이웃한 꼭짓점에 서로 다른 색을 칠하는 것이다. k가지 색으로 하는 적절한 색칠의 수는 k에 대한 다항식이며, 이를 그래프의 **채색 다항식**이라 한다. 이 개념은 1912년 조지 버코프(George Birkhoff)가 도입하였다. 문제의 논증을 k가지 색으로 반복하면

$$\text{경로: } k(k-1)^{n-1}, \qquad \text{사이클: } (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

을 얻는다. $k=3$이면 사이클의 공식은 $2^n + 2(-1)^n$이다. 버코프는 모든 지도의 그래프의 채색 다항식이 $k=4$에서 양수임을 보여 4색 정리(모든 지도는 이웃한 나라끼리 색이 다르도록 네 가지 색으로 칠할 수 있다)를 증명하고자 했다. 이 접근법은 끝내 성공하지 못했고, 4색 정리는 1976년에 케네스 아펠(Kenneth Appel)과 볼프강 하켄(Wolfgang Haken)이 컴퓨터의 대대적인 도움을 받아 마침내 증명하였다. 채색 다항식은 지금도 활발한 연구 분야이며, 통계물리학과 놀라운 연관이 있는데, 그곳에서는 자성에 관한 **포츠 모형**(Potts model)으로 나타난다.

행렬로 같은 수 세기

7장의 선형대수를 이용하여 답을 보는 다른 방법도 있다. $\mathbf{M}$을 대각성분이 0이고 나머지 성분이 1인 3×3 행렬이라 하자. 즉 색 j가 색 i 다음에 올 수 있을 때 (i,j) 성분이 1이다. 그러면 $\mathbf{M}^{n-1}$의 (i,j) 성분은 색 i로 시작하여 색 j로 끝나는 일렬 칠하기의 수이므로, r_n은 $\mathbf{M}^{n-1}$의 대각성분이다. 원의 칠하기는 n걸음 후에 출발점으로 돌아오는 수열이므로, 원의 칠하기의 수는 $\mathbf{M}^n$의 **대각합**(trace)이다. 모든 성분이 1인 행렬 $\mathbf{J}$에 대해 $\mathbf{M} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$이므로, $\mathbf{M}$의 고유값(eigenvalue)은 $3-1=2$(고유벡터(eigenvector) $(1,1,1)$)와 -1(중복도 2)이고, $\mathbf{M}^n$의 대각합은 고유값의 n제곱의 합이다.

$$\operatorname{tr} \mathbf{M}^n = 2^n + (-1)^n + (-1)^n = 2^n + 2(-1)^n.$$

이 **전달 행렬**(transfer matrix) 방법은 한 단계씩 쌓아 올리는 배열의 수를 세는 데 조합론과 통계물리학 전반에서 쓰인다.

더 도전하기

1 **k가지 색.** k가지 색으로 문제를 반복하여라. $r_{n+1} = s_n$이 여전히 성립하고 $r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$임을 보이고, r_n을 구한 다음, 사이클의 채색 다항식 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$을 이끌어 내어라.

2 **빨간색끼리 이웃하지 않기.** 일렬로 놓인 n개의 기둥을 이웃한 두 기둥이 모두 빨간색이 되는 일이 없도록 빨간색 또는 흰색으로 칠하는 방법은 몇 가지인가? (피보나치 수(Fibonacci numbers)가 나올 것이다.)

3 **바퀴.** 원의 모든 기둥과 이웃하는 가운데 기둥을 하나 더하자("바퀴(wheel)"). 이것을 4가지 색으로 칠하는 방법은 몇 가지인가? (**힌트**: 가운데 기둥이 한 가지 색을 쓰고, 원은 나머지 세 가지 색을 써야 한다.)

4 **목걸이.** 원의 두 칠하기 중 하나가 다른 하나를 회전한 것일 때 같은 것으로 본다면, $n=4$일 때 서로 다른 칠하기는 몇 가지인가? $n=5$일 때는? (이것이 **번사이드 보조정리**(Burnside's lemma)의 출발점이다.)

더 읽을거리

- **Robin Wilson, *Introduction to Graph Theory*** (Pearson). 그래프 이론 입문. 표준적인 첫 강의 교재로, 색칠과 4색 문제를 다룬다.
- **Robin Wilson, *Four Colours Suffice*** (Penguin). 네 가지 색이면 충분하다. 일반 독자를 위한 4색 정리 이야기이다.

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology*** (온라인 무료 공개). 생성함수론. 점화식과 그 풀이 방법을 다루며, 전달 행렬 방법도 포함한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.3절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/fence-posts.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com