9.2 축소판 램지 정리

학습지

문제

STEP I 1989, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s1-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 여섯 개의 점은 어떤 쌍이 어떤 색으로 이어져 있는지를 통해서만 의미를 가진다. 기하학적 배치는 주의를 흐트러뜨릴 뿐이다. 선분은 모두 몇 개이고, 각 점에서 나가는 선분은 몇 개인가?

1단계 다섯 개의 선분, 두 가지 색

다루는 내용: 여섯 개의 점

> ? **생각해 보기** 점 A에서 다섯 개의 선분(segment)이 뻗어 나가고, 각 선분은 금색 또는 은색이다. 각 색의 선분이 모두 두 개 이하일 수 있는가? 적어도 세 개의 선분에 대해서는 무엇이 반드시 성립하는가?

2단계 반대쪽 끝점을 보라

다루는 내용: 여섯 개의 점

잠깐, 직접 해 보기 AB, AC, AD가 모두 금색이라고 하자. 이제 삼각형 BCD를 보자. 이 삼각형의 변 중 어느 하나라도 금색이면 어떻게 되는가? 하나도 금색이 아니라면 어떻게 되는가?

3단계 다섯 개의 점으로는 부족하다

다루는 내용: 다섯 개의 점

생각해 보기 점이 다섯 개이면 각 점에 연결된 선분은 네 개뿐이므로, 모든 점에서 각 색의 선분이 두 개씩 되도록 시도해 볼 수 있다. 다섯 점을 정오각형(regular pentagon)의 꼭짓점에 놓고, 변은 한 가지 색으로, 대각선(diagonal)은 다른 색으로 칠해 보자. 한 가지 색으로만 이루어진 삼각형이 있는가?

숨은 수학

램지 수

램지 수(Ramsey number) $R(s,t)$는 K_N의 변을 금색과 은색으로 어떻게 칠하든 금색 K_s(s개의 점으로 이루어진 집합으로, 그 사이의 변이 모두 금색인 것)나 은색 K_t가 반드시 포함되도록 하는 가장 작은 N이다. 이 문제는 $R(3,3)=6$임을 보였다. 여섯 점이면 언제나 성립하고, 오각형은 다섯 점으로는 성립하지 않음을 보여 준다.

프랭크 램지(Frank Ramsey)는 1928년에 이 수들이 항상 존재함을, 즉 모든 s와 t에 대해 조건을 만족하는 N이 있음을 증명했다. 그 증명은 위의 논증을 일반화한 귀납법(induction)이며, $R(s,t) \le R(s-1,t)+R(s,t-1)$임을 보여 준다. 그러나 정확한 값을 구하는 것은 엄청나게 어렵다.

$$R(3,3)=6, \qquad R(4,4)=18, \qquad 43 \le R(5,5) \le 46.$$

$R(4,4)$의 값은 1955년에 밝혀졌다. 막대한 컴퓨터 탐색에도 불구하고 $R(5,5)$는 아직 알려지지 않았으며, 상계 46도 2024년에야 증명되었다. 컴퓨터로 K_{43}의 모든 색칠을 하나하나 확인할 수는 없다. 그런 색칠은 2^{903}가지로, 우주에 있는 원자의 수보다 훨씬 많다.

에르되시와 외계인

램지 이론을 발전시키는 데 누구보다 많은 일을 한 폴 에르되시(Paul Erdős)는 이런 이야

기를 즐겨 했다. 외계인이 지구를 침공해, $R(5,5)$의 값을 알려 주지 않으면 지구를 파괴하겠다고 위협한다고 하자. 우리는 모든 컴퓨터와 수학자를 총동원해야 하며, 그러면 그 값을 찾아낼 수도 있다. 하지만 그들이 $R(6,6)$을 요구한다면, 우리는 외계인을 무찌르려고 해야 한다. 에르되시는 또한 1947년에 놀라운 방법으로 $R(k,k) > 2^{k/2}$임을 증명했다. 그는 점이 $2^{k/2}$개보다 적은 그래프를 **무작위로** 색칠하면 단색 K_k를 포함하지 않을 확률이 양수임을 보였다. 따라서 아무도 그것을 만드는 방법을 모르더라도 좋은 색칠은 반드시 존재한다. 이 **확률론적 방법**(probabilistic method)은 오늘날 조합론에서 가장 강력한 도구 가운데 하나이다.

혼돈 속의 질서

램지 정리에는 친척이 많으며, 모두 같은 생각, 즉 충분히 큰 구조는 질서를 피할 수 없다는 생각을 표현한다. **판 데르 베르던 정리**(van der Waerden's theorem)는 자연수를 유한 개의 색으로 칠하면 한 가지 색으로 이루어진 등차수열(arithmetic progression)이 얼마든지 긴 것이 존재한다고 말한다. **에르되시-세케레시 정리**(Erdős–Szekeres theorem)는 서로 다른 n^2+1개의 수로 이루어진 수열은 길이가 $n+1$인 증가하는 부분수열(subsequence)이나 감소하는 부분수열을 포함한다고 말한다. 그리고 램지 자신은 논리학의 질문에 관심이 있었다. 그는 논리적 명제의 참거짓을 판정하는 문제에 관한 논문에서 보조정리(lemma)로서 자신의 정리를 증명했다.

더 도전하기

1 **적어도 두 개.** K_6를 두 가지 색으로 어떻게 칠하든 사실은 단색 삼각형이 적어도 **두 개** 있음을 보여라. (**힌트:** "이색 각", 즉 한 꼭짓점을 공유하면서 색이 서로 다른 변의 쌍을 세어라. 금색 변 g개와 은색 변 $5-g$개를 가진 점은 그런 각 $g(5-g) \leq 6$개의 꼭짓점이다. 단색이 아닌 삼각형은 각각 그런 각을 정확히 두 개 포함한다.)

2 **세 가지 색.** K_{17}의 변을 세 가지 색으로 칠하면 단색 삼각형이 있음을 보여라. (**힌트:** 어떤 점에는 같은 색의 변이 적어도 여섯 개 있다.)

3 **셋 또는 넷.** $R(3,4) \leq 10$임을 보여라. 즉 K_{10}을 금색과 은색으로 어떻게 칠하든 금색 삼각형이나 은색 K_4가 있다. (**힌트:** 한 점에는 금색 변이 적어도 4개 있거나 은색 변이 적어도 6개 있다.) 실제로는 $R(3,4) = 9$이다.

4 **단조 부분수열.** $n = 2$일 때 에르되시-세케레시 정리를 증명하여라. 즉 서로 다른 5개의 수로 이루어진 수열은 길이가 3인 증가하는 부분수열이나 감소하는 부분수열을 포함한다. 둘 다 포함하지 않는, 길이가 4인 수열을 찾아라.

더 읽을거리

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 비둘기집 원리와 램지 이론을 다룬 장.
- **Ronald Graham & Joel Spencer, "Ramsey theory"**, *Scientific American* (1990년 7월). 두 선도적 연구자가 쓴 대중적인 입문 글.
- **Noga Alon & Joel Spencer, *The Probabilistic Method*** (Wiley). 에르되시의 방법을 다룬 표준 교재로, 첫 장은 읽기 쉽다.
- **Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers*** (Fourth Estate). 에르되시의 전기.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.2절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/ramsey.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com