9.13 조작된 주사위

학습지

문제

STEP I 1999, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q12

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $x > 0$일 때 $x + \frac{1}{x} \geq 2$를 어떻게 증명하겠는가? 등호는 언제 성립하는가?

1단계 양 끝의 합

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 합이 2와 12가 될 확률(probability)을 q_i와 r_j로 나타내어라. 열한 가지 합이 모두 확률 $\frac{1}{11}$을 가진다고 가정하면 어떤 방정식을 얻는가?

2단계 가운데 합

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 7을 만드는 방법 가운데 두 가지는 눈 1과 6만 사용한다. 그 확률을 적고, 앞에서 얻은 방정식을 이용하여 q_1과 q_6을 바꾸어 써라. 어디에서 $x + \frac{1}{x} \geq 2$를 쓸 수 있는가?

3단계 한 주사위를 두 번 던지기

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 두 번 던진 결과가 같을 확률은 $q_1^2 + \cdots + q_6^2$이다. q_j의 합이 1일 때 이 값은 얼마나 작아질 수 있는가? $q_j = \frac{1}{6} + e_j$로 놓아 보아라.

숨은 수학

다항식을 이용한 증명

이번에는 Section 9.6의 생성함수(generating function)를 이용한 완전히 다른 증명을 보자. $Q(x) = q_1 x + \cdots + q_6 x^6$, $R(x) = r_1 x + \cdots + r_6 x^6$이라 하자. 모든 합의 확률이 $\frac{1}{11}$이라면

$$Q(x)R(x) = \frac{x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}}{11} = \frac{x^2}{11}(1 + x + \cdots + x^{10}).$$

이다. 그런데 $Q(x)/x$는 실수 계수를 갖는 5차 다항식이고, 차수가 홀수인 실계수 다항식은 모두 실근을 갖는다(그래프가 $-\infty$에서 $+\infty$로, 또는 그 반대로 가기 때문이다). 따라서 좌변은 0이 아닌 실근을 갖는다. 하지만 $1 + x + \cdots + x^{10} = \frac{x^{11}-1}{x-1}$이고, 그 근은 1을 제외한 11차 단위근(roots of unity)이며, 그중 실수인 것은 없다. 모순이다. 같은 논증으로, $n - 1$이 홀수일 때, 즉 n이 짝수일 때 두 개의 n면체 주사위를 어떻게 조작해도 합들이 같은 가능성을 갖게 할 수 없음을 보일 수 있다. (n이 홀수이면 다항식 논증에 더 많은 작업이 필요하지만, 위의 산술-기하 평균 증명은 모든 $n \geq 2$에 대해 성립한다.)

충돌 확률

(ii)에 나온 양 $\sum q_j^2$, 즉 서로 독립인 두 번의 추출 결과가 같을 확률을 분포의 **충돌 확률**(collision probability)이라 한다. (ii)는 이 값이 균등분포(uniform distribution)에서 가장 작다는 것을 보여 준다. 충돌 확률은 분포가 얼마나 집중되어 있는지를 측정한다. 생태학에서 $\sum q_j^2$은 심프슨(Simpson)의 다양성 지수인데, 여기서 q_j는 서식지에서 종 j가 차지하는 비율이다. 경제학에서는 시장 집중도를 나타내는 Herfindahl 지수이고, 암호학에서는

비밀번호 분포를 얼마나 쉽게 추측할 수 있는지를 측정한다. 또한 이것은 Section 9.9 끝의 언급을 설명해 준다. 생일의 확률이 균등하지 않으면 생일이 같은 사람이 있을 가능성은 커질 수밖에 없다.

불가능성 증명

수학에서 가장 유명한 결과 가운데 일부는 어떤 것을 할 수 없다고 말한다. 제곱하여 2가 되는 분수는 없다. 자와 컴퍼스만으로 하는 작도(ruler-and-compass construction)로는 모든 각을 삼등분할 수 없다. 거듭제곱근(radicals)을 이용한 공식으로 모든 5차방정식(quintic)을 풀 수는 없다. 모든 수학적 명제를 판정하는 알고리즘은 없다. 이 결과들은 각각 그 분야를 바꾸어 놓았다. 어떤 방법도 통하지 **않음**을 증명하려면 가능한 방법 전체의 공간을 이해해야 하기 때문이다. 조작된 주사위 문제는 그 축소판이다. 모든 조작을 배제하기 위해 모든 조작이 따라야 하는 불변 성질(invariant, 산술-기하 평균 부등식)이 필요했다.

더 도전하기

1 **코시-슈바르츠.** 코시-슈바르츠 부등식 $(\sum a_j b_j)^2 \le \sum a_j^2 \sum b_j^2$에 $a_j = q_j$, $b_j = 1$을 대입하여 (ii)를 한 줄로 증명하여라.

2 **서로 다른 두 주사위.** 서로 다른 조작된 주사위 두 개를 각각 한 번씩 던질 때, 두 주사위에서 같은 수가 나올 확률이 $\frac{1}{6}$보다 작을 수 있는가? 0이 될 수 있는가?

3 **다른 눈을 가진 주사위의 균등한 합.** 면에 다른 수를 적으면 두 주사위의 합이 같은 가능성을 가질 수 있음을 보여라. 한 주사위에는 $0, 1, 2, 3, 4, 5$를, 다른 주사위에는 $0, 6, 12, 18, 24, 30$을 적어 보아라. 어떤 합들이 나오는가? 이것이 왜 문제의 결론에 모순되지 않는가?

4 **주사위 세 개.** 면에 1부터 6까지 적힌 조작된 육면체 주사위 세 개로 3부터 18까지의 모든 합이 같은 가능성을 갖게 할 수 있는가? (**힌트:** 합 3, 8, 13, 18과 여섯 개의 수에 대한 산술-기하 평균 부등식을 이용하여라. 이번에는 다항식 증명이 왜 통하지 않는가?)

더 읽을거리

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 산술-기하 평균 부등식에서 출발하는 아름다운 부등식 입문서이다.
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction*** (Oxford University Press). 생성함수와 위와 같은 증명에서의 활용을 다룬다.

- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press)의 앞부분 장들. 가장 유명한 불가능성 증명인 5차방정식에 관한 증명을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.13절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/loaded-dice.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com