9.12 무작위 부분집합

학습지

문제

STEP III 2019, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** $\{1, \ldots, n\}$의 부분집합을 예/아니요 질문에 대한 n개의 답의 나열로 어떻게 나타낼 수 있을까?

1단계 원소 하나

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** 1을 포함하지 않는 각 부분집합(subset)을, 거기에 1을 추가해서 얻는 부분집합과 짝지어 보자. 부분집합 중 몇 분의 몇이 1을 포함하는가?

2단계 서로소인 집합

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 A_1과 A_2가 서로소(disjoint)일 필요충분조건은 두 집합에 동시에 속하는 원소(element)가 없는 것이다. 원소 하나에 대해, 일어날 가능성이 같은(equally likely) 네 가지 경우를 나열해 보자. 어느 경우가 금지되는가? n개의 원소에 대해 확률을 곱해도 되는 이유는 무엇인가?

생각해 보기 집합이 m개일 때, 주어진 원소가 그 모든 집합에 속할 확률(probability)은 얼마인가?

3단계 부분집합

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $A_1 \subseteq A_2$일 때, 원소 하나에 대한 네 가지 경우 중 어느 것이 금지되는가?

잠깐, 직접 해 보기 사슬(chain) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$에 대해, 원소 하나가 각 집합에 속하는지 속하지 않는지를 나타내는 8가지 패턴을 나열해 보자. 어떤 원소가 사슬의 한 집합에 속하면, 그 원소는 또 어디에 속해야 하는가? 허용되는 패턴의 개수를 센 다음, 집합이 m개일 때도 같은 방법으로 세어 보자.

숨은 수학

확률 없이 세기

선택의 가짓수를 곱하면 각 확률이 개수로 바뀐다. $A_1 \subseteq A_2$인 순서쌍 (A_1, A_2)의 개수는 $4^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3^n$이다. 이 쌍들을 직접 셀 수도 있다. A_2의 크기 k를 정하고, A_2 자체를 $\binom{n}{k}$가지 방법으로 고른 다음, A_1을 A_2의 2^k개 부분집합 중 하나로 고르면 된다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

이것은 $(1+2)^n$에 대한 이항정리(binomial theorem)이다. 같은 대상을 한 번은 원소별로, 한 번은 크기별로, 두 가지 방법으로 세어 항등식을 증명한 것이다. 이것이 **이중 계수**(*double counting*)라는 방법으로, Section 7.9에서 정다면체를 다룰 때 만난 적이 있다. 마찬가지로 사슬 $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_m$의 개수는 $(m+1)^n$이다.

부분집합의 격자

$\{1, \ldots, n\}$의 부분집합들은 포함 관계로 순서를 매기면 **불 격자**(*Boolean lattice*)라는 구조를 이룬다. 이것은 n차원 정육면체로 그려 볼 수 있다. 각 부분집합은 예/아니요 답의 나열로 이름 붙은 꼭짓점이고, 모서리를 따라 움직이는 것은 원소 하나를 추가하거나 제거하는 것이다. 사슬은 위로 올라가는 경로이다. 부분집합족에 조건이 주어졌을 때 그 족이 얼마나 클 수 있는지를 밝히는 깊은 결과들이 있다. **슈페르너 정리**(*Sperner's theorem*)(1928)는 어떤 집합도 다른 집합을 포함하지 않는 가장 큰 족이 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$개의 집합으로 이루어짐을 말하고, **에르되시–코–라도 정리**(*Erdős–Ko–Rado theorem*)(1961)는 어느 두 집합도 서로 겹치도록 k개 원소의 집합을 몇 개까지 고를 수 있는지를 말한다. 두 정리 모두 조합론(combinatorics) 입문 강의의 표준 내용이며, 부분집합을 동전 던지기로 보는 관점은 가장 매끄러운 증명 몇 가지를 제공한다.

불의 대수

조지 불(George Boole)의 *The Laws of Thought*("사고의 법칙", 1854)는 논리적 명제를 집합으로, "그리고", "또는", "아니다"를 각각 교집합, 합집합, 여집합으로 다루었다. 집합을 예/아니요 답의 문자열로 부호화하는 것은 바로 컴퓨터가 집합을 표현하는 방식이다. $\{1, \ldots, 64\}$의 부분집합은 하나의 64비트 수이고, 교집합은 "비트 AND" 명령이다. 원소 하나(비트 하나)씩 다루는 이 문제의 방법은 바로 그러한 연산을 분석하는 방법이다.

더 도전하기

1 **덮기.** $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 = S)$와 $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = S)$를 구하여라.

2 **같은 크기.** $\mathrm{P}(|A_1| = |A_2|) = \binom{2n}{n}/4^n$임을 보여라. (**힌트:** $|A_1| = |A_2|$는 $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$일 때 정확히 성립한다.) n이 클 때 이 값이 약 $1/\sqrt{\pi n}$임을 보여라.

3 **셋으로 분할하기.** S의 서로소인 부분집합의 순서쌍 (A, B)의 개수가 3^n임을 보이고, 서로소인 부분집합의 순서 없는 쌍 $\{A, B\}$의 개수를 구하여라.

4 **작은 n에 대한 슈페르너 정리.** $n = 3$과 $n = 4$에 대하여, 어떤 집합도 다른 집합을 포함하지 않는 $\{1, \ldots, n\}$의 부분집합족 중 가장 큰 것을 구하여라.

더 읽을거리

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 부분집합과 부분순서 집합을 다루는 장들.
- **Béla Bollobás, *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability*** (Cambridge University Press). 슈페르너 정리에서 출발하여 부분집합족을 다루는 짧고 우아한 책.
- **Peter Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*** (Cambridge University Press). 두 가지 방법으로 세기를 특히 강조하는 입문서.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.12절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/random-subsets.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com