9.10 언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록

학습지

문제

STEP I 2011, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q12

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** £1 손님은 동전을 하나씩 주고, £2 손님은 (거스름돈으로) 동전을 하나씩 가져간다. 언제 막히게 되는가?

1단계 £2 동전 한 개

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** £2 동전을 내는 손님이 한 명일 때, 언제 거스름돈을 줄 수 없게 되는가? 이 손님이 줄의 맨 앞에 설 확률(probability)은 얼마인가?

2단계 £2 동전 두 개

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 첫 번째 사람은 반드시 £1 동전을 가지고 있어야 한다. 그다음 두 번째 사람에 따라 경우를 나눈다. 두 번째 사람이 £1 동전을 가지고 있다면 이제 안전한가? £2 동전을 가지고 있다면 어떤 상황으로 되돌아가는가? 그리고 소문항 (i)을 이용할 수 있는가?

3단계 경로(path)로 본 줄

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 경우를 하나하나 나누는 방법은 $n = 3$일 때 통하지만 길다. 대신 응대한 사람 수에 대하여 가지고 있는 £1 동전의 개수를 그래프로 그려 보아라. 성공하는 줄은 어떤 모양인가?

4단계 반사

다루는 내용: 소문항 (iii)

잠깐, 직접 해 보기 나쁜 경로, 즉 높이 -1에 닿는 경로를 하나 잡는다. 처음으로 -1에 닿기 전까지의 부분을 직선 $y=-1$에 대하여 반사(reflection)한다. 새 경로는 어디에서 시작하여 어디에서 끝나는가? 그 두 점 사이의 모든 경로의 수를 세어라.

숨은 수학

카탈랑 수

$m=n$일 때(£1 동전이 딱 필요한 만큼 있을 때), 성공하는 줄의 개수는

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

즉 n번째 **카탈랑 수** C_n: $1,1,2,5,14,42,132,\ldots$이다. Richard Stanley의 책 *Catalan Numbers*에는 이 수가 세는 서로 다른 대상이 이백 가지 넘게 실려 있다. 그 가운데 몇 가지를 들면, n쌍의 괄호를 올바르게 배열하는 방법의 수("(()()()"는 되지만 "())(()"는 안 되는데, 이는 "("를 £1로, ")"를 £2로 보면 동전 논증과 정확히 같다), $n+2$각형을 서로 교차하지 않는 대각선으로 삼각형들로 나누는 방법의 수, $n+1$개 인수의 곱에 괄호를 치는 방법의 수가 있다.

무작위 행보

줄은 무작위 행보(random walk)이고, 반사 원리는 무작위 행보를 연구하는 기본 도구 가운데 하나이다. 예를 들어 이 원리를 쓰면 0에서 출발하는 공정한 무작위 행보는 언젠가 반드시 0으로 돌아오며, 처음 $2n$걸음 동안 줄곧 양수에 머물 확률이 $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}2^{-2n}\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$임을 보일 수 있다. 연속인 경우에 같은 반사 논증을 **브라운 운동**(*Brownian motion*)에 적용하면 그 최댓값의 분포를 얻는다. 이것은 주가가 어떤 경계를 한 번이라도 넘는지에 따라 수익이 달

라지는 특정 금융 옵션의 가격을 매기는 바탕이 된다.

베르트랑의 투표 문제

1887년 Joseph Bertrand는 다음과 같이 물었다. 후보 A가 a표를, B가 $b < a$표를 얻는 선거에서, 개표하는 내내 A가 엄격하게 앞서 있을 확률은 얼마인가? 답 $\frac{a-b}{a+b}$는 같은 해에 Désiré André가 증명하였고, 그의 논증은 흔히 반사 원리로 기억된다(다만 역사가들은 André의 실제 증명이 약간 다른 전단사를 썼다고 지적한다). 우리의 추첨권 문제는 동점을 허용하는 변형으로, 성공이란 £1의 개수가 한 번도 £2의 개수 **아래로** 떨어지지 않는 것을 뜻한다. 연습문제 하나에서 우리의 답으로부터 베르트랑의 답을 이끌어 낸다.

더 도전하기

1 **경우를 나누어 셋까지.** 소문항 (ii)에서처럼 줄의 처음 몇 사람으로 조건을 나누어 소문항 (iii)을 증명하고, 반사 원리가 얼마나 많은 수고를 덜어 주는지 확인하여라.

2 **베르트랑의 투표 문제.** 어떤 선거에서 A는 a표를, B는 $b < a$표를 얻는다. 개표하는 내내 A가 엄격하게 앞서 있을 확률이 $\frac{a-b}{a+b}$임을 보여라. (**힌트:** 첫 표는 반드시 A의 것이어야 한다. 그 뒤로 A는 B보다 ...넘게 뒤처져서는 안 된다.)

3 **괄호.** 세 쌍의 괄호를 올바르게 배열하는 5가지 방법과 오각형을 삼각형들로 나누는 5가지 방법을 모두 나열하여라. 둘 사이의 전단사를 찾을 수 있는가?

4 **£5 지폐.** 가격이 £1인 표를 사려는 줄에 £1 동전을 가진 사람 m명과 £5 지폐를 가진 사람 n명이 있다. 이 경우에는 왜 반사 원리로 간단한 답을 얻을 수 없는지 설명하여라. (이 일반화는 훨씬 어렵다.)

더 읽을거리

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1** (Wiley), 제III장. 무작위 행보와 반사 원리를 다룬 고전적인 책이다.
- **Richard Stanley, *Catalan Numbers*** (Cambridge University Press). 이백 가지가 넘는 해석과 연습문제가 실려 있다.
- **Marc Renault, "Lost (and found) in translation: André's actual method and its application to the generalized ballot problem"**, *American Mathematical Monthly* 115 (2008). 반사 원리의 역사를 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.10절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/ballot.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com