9.1 평면을 자르는 직선

학습지

문제

STEP II 1990, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **잠깐, 직접 해 보기** 직선들이 일반적 위치(general position)에 있도록(어느 두 직선도 평행하지 않고, 어느 세 직선도 한 점을 지나지 않도록) 하여 $n = 1, 2, 3, 4$인 경우를 조심스럽게 그려 보라. 각 경우에 선분과 영역의 개수를 세어 보라. 규칙을 추측할 수 있는가?

1단계 선분의 개수 세기

다루는 내용: 선분의 개수

> **잠깐, 직접 해 보기** 한 번에 직선 하나씩 살펴보자. 다른 직선 가운데 몇 개가 이 직선과 만나고, 만나는 점은 서로 다른 점 몇 개인가? 그 점들은 이 직선을 몇 조각으로 나누는가? 이제 여기에 직선의 개수를 곱한다.

2단계 직선을 하나 더 그으면 어떻게 되는가?

다루는 내용: 영역의 개수

생각해 보기 직선 $n-1$개를 그린 다음 n번째 직선을 더한다. 이 직선은 나머지 직선들에 의해 선분(segment) n개로 나뉜다. 각 선분은 자신이 지나가는 영역(region)에 어떤 일을 하는가?

3단계 점화식 풀기

다루는 내용: 영역의 개수, 공식

> **생각해 보기** $R(n) = R(n-1) + n$을 얻었을 것이다. $R(0) = 1$(또는 $R(1) = 2$)에서 시작하여 차례로 더해 나가거나, 수학적 귀납법(induction)으로 공식을 증명한다.

숨은 수학

변장한 오일러 공식

여기 두 번째 증명이 있다. 이 증명은 답을 단지 유도하는 데 그치지 않고 설명해 준다. 직선들의 배치를 하나의 지도로 생각하자. 교점은 **꼭짓점**(*vertex*), 선분은 **변**(*edge*), 영역은 **면**(*face*)이다. 꼭짓점은 $V = \binom{n}{2}$개(직선 두 개의 쌍마다 하나), 변은 $E = n^2$개이다. 무한한 선분은 끝점이 하나뿐이므로, 이들이 모두 만나는 "무한대" 꼭짓점 하나를 추가한다. 그러면 이 그림은 구 위에 그려진 지도가 된다(평면으로 공을 감싸고 무한대가 꼭대기에 있다고 상상하라). Section 7.9의 오일러 공식 $V - E + F = 2$에 의해

$$\left(\binom{n}{2} + 1\right) - n^2 + F = 2, \qquad \text{따라서} \qquad F = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

완전히 다른 방향에서 같은 수가 나온다. 영역들은 종류별로도 깔끔하게 나뉜다. 그중 $2n$개는 유계가 아니고(이웃한 무한 반직선 쌍마다 하나), 나머지 $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) - 2n = \binom{n-1}{2}$개는 유계이다.

이항계수와 고차원

공식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2},$$

그리고 이것은 우연이 아니다. 어떤 직선도 수평이 되지 않도록 그림을 돌리자. 아래로 유계인 영역에는 가장 낮은 점이 있는데, 이 점은 교점이어야 하고, 각 교점은 정확히 한 영역(그 바로 위의 영역)의 가장 낮은 점이다. 이로써 직선 쌍마다 하나씩 $\binom{n}{2}$개의 영역을 얻는다. 나머지 영역은 모두 아래로 끝없이 뻗어 있으므로, 모든 교점보다 훨씬 아래에 그은 수평선과 만난다. n개의 직선은 그 수평선을 $n+1$개의 구간으로 자르고, 그러한 영역마다 구간이 하나씩 있다. 모두 합하면 $\binom{n}{2}+n+1$이다. 3차원에서는 일반적 위치에 있는 n개의 평면이 공간을

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

개의 조각(**케이크 수**(*cake numbers*) $1,2,4,8,15,26,\ldots$)으로 자르며, 이 규칙은 모든 차원에서 계속된다. 증명은 같은 귀납법이다. 새 평면은 다른 평면들에 의해 평면 위의 직선들처럼 배열된 영역들로 잘리고, 그 영역 각각이 공간의 한 조각을 둘로 나눈다.

슈타이너와 초평면 배열

직선과 평면으로 잘린 영역의 개수에 대한 공식은 1826년 슈타이너(Jakob Steiner)가 발견했다. 오늘날 이 공식은 **초평면 배열**(*hyperplane arrangements*) 이론의 출발점이다. 이 이론은 일반적 위치가 아닌 경우를 포함하여, 직선, 평면, 그리고 이들의 고차원 유사물을 임의로 모아 놓았을 때 생기는 영역의 개수를 센다. 1975년 Thomas Zaslavsky의 놀라운 정리는 어떤 초평면들이 만나는지를 담고 있는 다항식을 이용하여 임의의 배열의 영역 개수를 센다. 같은 아이디어가 기계 학습에도 나타난다. "ReLU" 단위로 만든 신경망은 입력 공간을 초평면으로 잘라 영역들로 나누며, 그 영역의 개수는 신경망이 나타낼 수 있는 함수가 얼마나 복잡한지를 가늠하는 척도가 된다.

더 도전하기

1 **원.** 어느 두 원도 두 점에서 만나고 어느 세 원도 한 점을 지나지 않는 n개의 원이 평면을 n^2-n+2개의 영역으로 나눔을 보여라.

2 **평행선.** n개의 직선 중 k개가 모두 서로 평행하다면(그 밖에는 일반적 위치), 영역은 몇 개인가?

3 **케이크 수.** 일반적 위치에 있는 n개의 평면이 공간을 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$개의 영역으로 나눔을 귀납법으로 증명하라.

4 **깨지는 규칙.** 원 위에 n개의 점을 놓고 모든 쌍을 현으로 잇되, 원 내부의 한 점을 세 현이 지나지 않도록 하라. $n=1,2,3,4,5$일 때 영역은 $1,2,4,8,16$개이다. $n=6$일 때 영역의 개수를 세어 보라. (**힌트:** 오일러 공식을 이용하라. 네 점의 집합마다 교점이 하나씩 생긴다.) 그 개수가 $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*** (Addison-Wesley), 1장. 바로 이 문제와 그 변형인 "피자" 문제, "지그(zig)" 문제로 시작한다.
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics*** (World Scientific). 친절한 입문 교재로, 귀납법, 그래프, 오일러 공식을 다루는 장이 있다.
- **Richard Guy, "The strong law of small numbers"**, *American Mathematical Monthly* 95 (1988). 당연해 보이지만 거짓으로 밝혀지는 여러 규칙을 소개하며, 연습 문제의 원 문제도 포함되어 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 9.1절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/lazy-caterer.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com