8.8 주기 3이면 혼돈이다

학습지

문제

STEP III 2025, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** $y = 7 - 2|x|$의 그래프는 어떤 모양인가? 이 그래프는 직선 $y = x$와 어디에서 만나는가? 이 함수는 구간 $[-7, 7]$을 어디로 보내는가?

1단계 $\mathrm{f} \circ \mathrm{f}$의 그래프

다루는 내용: 소문항 (i)(a)

> **생각해 보기** x가 -7에서 0까지 움직일 때 $\mathrm{f}(x)$는 $[-7, 7]$ 전체를 지난다. 그렇다면 이 구간에서 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$는 어떻게 움직이는가? 0에서 7까지는 어떠한가?

2단계 $f(f(x)) = x$ 풀기

다루는 내용: 소문항 (i)(b), (c)

생각해 보기 해 가운데 두 개는 f의 고정점(fixed point)이다. 이들이 $f(f(x)) = x$의 해도 되는 까닭은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 그 밖의 해 p에 대하여 $q = f(p)$라 하면 $f(q) = p$이다. p와 q의 부호가 같을 수 있는가? 같을 수 없다면 p와 q에 대한 일차방정식 두 개를 세워 풀어라. $[-7, 7]$ 밖에는 해가 없음을 확인하라.

3단계 늦게 순환에 들어서기

다루는 내용: 소문항 (i)(d)

생각해 보기 $a = \frac{28}{5}$에서 시작하여 처음 몇 항을 계산하라. 언제 2-순환(2-cycle)에 합류하는가?

4단계 3-순환

다루는 내용: 소문항 (ii)(a), (b)

생각해 보기 $a = 1$과 $a = -\frac{7}{9}$에서 시작하는 수열(sequence)을 계산하라.

잠깐, 직접 해 보기 $[-7, 7]$에서 $\mathrm{f} \circ \mathrm{f} \circ \mathrm{f}$의 그래프는 몇 개의 선분 조각으로 이루어지며, 각 조각은 $y = x$와 몇 번 만날 수 있는가? 이미 알고 있는 해의 개수를 세어 보라.

5단계 늦게 3-순환에 들어서기

다루는 내용: 소문항 (ii)(c)

> **잠깐, 직접 해 보기** 소문항 (i)(d)에서처럼 순환 $1 \to 5 \to -3$에서 거꾸로 거슬러 올라가라. f에 의해 1로 보내지는 수는 무엇인가? 그 가운데 순환에 속하지 않는 수를 골라 계속 거슬러 올라가라.

숨은 수학

모든 길이의 순환

4단계의 세기 방법은 단계 수가 몇이든 통한다. f를 n번 적용한 것을 f^n으로 쓰자. $[-7,7]$에서 f^n의 그래프는 각각 전체 높이를 지나가는 2^n개의 선분으로 이루어지므로, $\mathrm{f}^n(x) = x$의 해는 정확히 2^n개이다. 그 가운데 일부는 n의 약수(divisor)인 더 짧은 주기 d를 가지지만, 각 d에 대해 그런 해는 많아야 2^d개이고,

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad (n\text{의 약수 가운데 } d < n\text{인 것에 대해 합한다})$$

이다. n보다 작은 약수는 모두 $n/2$ 이하이고, $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \le 2^n$이기 때문이다. 따라서 모든 n에 대해 주기가 정확히 n인 점이 존재한다. 이 함수는 모든 길이의 순환을 가진다.

주기 3이 모든 것을 강제하는 이유

Li와 Yorke의 정리는 이것이 우리 함수만의 특별한 성질이 아니라고 말한다. 구간에서 그 구간 자신으로 가는 연속함수 g가 3-순환을 가지면, 어떤 함수이든 모든 길이의 순환을 가진다. 증명에는 사잇값 정리(intermediate value theorem) 말고는 아무것도 쓰이지 않으며, 우리의 3-순환이 증명의 흐름을 잘 보여 준다.

생각해 보기 순환 $1 \to 5 \to -3$의 점들 사이에 있는 두 구간을 $I_1 = [-3, 1]$, $I_2 = [1, 5]$라 하자. f는 각 구간을 어디로 보내는가?

I_2에서 f는 $f(1) = 5$에서 $f(5) = -3$까지 감소하므로 $f(I_2) = [-3, 5] = I_1 \cup I_2$이다. I_1에서 f는 $f(-3) = 1$에서 $f(0) = 7$까지 올라갔다가 $f(1) = 5$로 내려오므로 $f(I_1) = [1, 7]$이고, 이는 I_2를 포함한다. 여기서 순환의 세 점만 사용했다는 데 주목하자. $a < b < c$인 3-순환 $a \to b \to c$를 가지는 연속함수는 어느 것이나 같은 방식으로 구간들을 덮는다. 이를 어느 구간이 어느 구간을 덮는지 나타내는 도표로 요약할 수 있다(그림 8.8.3).

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

그러면 정리는 다음 두 사실에서 나오는데, 둘 다 사잇값 정리의 결과이다.

- $g(I) \supseteq I$이면 g는 I 안에 고정점을 가진다. ($g(x) - x$에 사잇값 정리를 적용한다.)
- $g(I) \supseteq J$이면 $g(I') = J$를 정확히 만족하는 더 작은 닫힌구간 $I' \subseteq I$가 존재한다.

주기 n인 점을 찾으려면 도표에서 고리 $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$를 따라가면 된다. I_2 안에서 $n-1$단계를 머물고, 한 단계 동안 I_1로 나갔다가 돌아오는 것이다. 두 번째 사실을 되풀이해 쓰면, I_2를 줄여서 그 점들의 궤도(orbit)가 이 경로(itinerary)를 따르는 시작점들의 구간을 얻을 수 있고, g^n은 그 구간을 I_2 전체 위로 보낸다. 첫 번째 사실에 따라 $g^n(x) = x$이면서 $n-1$번째 단계에서만 I_1을 방문하는 점 x가 존재한다. 그 주기는 n보다 작을 수 없다. 그렇다면 I_1 방문이 더 일찍 되풀이될 것이기 때문이다. (I_1과 I_2가 점 1을 공유하므로 미묘한 점이 하나 있는데, 이것이 문제를 일으키지 않음을 확인하는 것은 연습문제로 남긴다.)

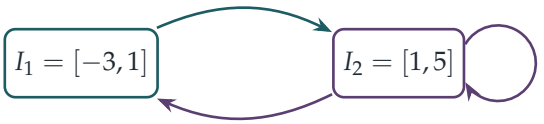


그림 8.8.3 3-순환의 덮개 도표(covering diagram). 한 구간에서 다른 구간으로 가는 화살표는 앞 구간의 상이 뒤 구간을 포함한다는 뜻이다. 도표의 모든 고리는 함수의 순환 하나를 준다. 고리 $I_2 \to I_2$는 고정점을, $I_1 \to I_2 \to I_1$은 2-순환을 주고, I_1을 방문하기 전에 I_2에서의 고리를 $n-1$번 돌면 길이 n인 순환을 얻는다.

샤르코우스키 정리

Li와 Yorke가 처음은 아니었다. 1964년 우크라이나 수학자 샤르코우스키(Oleksandr Sharkovskii)는 훨씬 더 완전한 결과를 증명했는데, 이 결과는 *Ukrainian Mathematical Journal*에 러시아어로 발표되어 서방에는 10년 동안 알려지지 않았다. 양의 정수를 다음과

같이 늘어놓자.

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ \ldots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1\,:$$

먼저 3부터 시작하는 홀수, 다음으로 홀수의 두 배, 그다음 홀수의 네 배, 이런 식으로 이어지다가 마지막에 2의 거듭제곱이 내림차순으로 온다. 샤르코우스키 정리는 구간에서 정의된 연속함수가 길이 m인 순환을 가지면, 이 목록에서 m 뒤에 오는 모든 길이의 순환을 가진다고 말한다. 3이 맨 앞에 오므로 주기 3이면 모든 주기가 존재한다. 게다가 이 정리는 더 이상 개선할 수 없다. 모든 m에 대해 길이 m인 순환은 가지지만 목록에서 그보다 앞선 길이의 순환은 가지지 않는 함수가 존재한다. 끝에 오는 2의 거듭제곱들은 바로 Section 8.7에 나오는 로지스틱 사상의 주기 배가 연쇄이며, 3-순환은 그곳에서 $k = 1+\sqrt{8}$일 때 나타난다.

텐트 사상과 로지스틱 사상

$[0,1]$을 $[-7,7]$ 위로 보내는 치환 $x = 14y - 7$을 하자. 간단한 계산으로 f가 **텐트 사상**(tent map)

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2-2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

이 됨을 알 수 있고, 여기에 치환 $u = \sin^2(\pi y/2)$를 한 번 더 하면 텐트 사상은 로지스틱 사상(logistic map) $u \mapsto 4u(1-u)$로 바뀐다. 따라서 이 문제의 함수는 Section 8.7의 혼돈 로지스틱 사상을 곧게 편 것이다. $f^3(x) = x$의 여덟 해는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$의 여덟 해에 대응한다.

더 도전하기

1 **4-순환.** 덮개 도표를 이용하여 f의 4-순환이 어디에 있어야 하는지 예측하라(I_2에서 세 단계, I_1에서 한 단계). 그런 다음 그것을 정확히 구하라. (**힌트**: 이 순환은 양수인 점 세 개와 음수인 점 한 개로 이루어진다. 네 개의 일차방정식을 세워 보라.)

2 **미묘한 점.** 주기 3이면 주기 n이 존재한다는 증명에서, $n \ge 4$일 때 찾은 점 x가 점 1(또는 원래 3-순환의 어떤 점)일 수 없는 이유를 설명하라.

3 **주기 3 없이 주기 5.** $g(1)=3, g(3)=4, g(4)=2, g(2)=5, g(5)=1$을 만족하고 이 점들을 선분으로 이은, $[1,5]$에서 정의된 연속함수의 그래프를 그려라. 구간 $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$에 대한 덮개 도표를 그려라. 길이 3인 고리를 찾을 수 있는가? (샤르코우스키 정리에 따르면 3-순환은 없다.)

4 **텐트 사상.** $x = 14y - 7$이 f를 텐트 사상으로 바꾼다는 것을 확인하라. 그런 다음 텐트 사상이 이진법(binary)으로 쓴 y를 두 배 하되, 맨 앞자리가 1일 때마다 모든 자릿수를 뒤집는다는 것을 보이고, 이를 이용하여 텐트 사상의 3-순환을 구하라.

더 읽을거리

- **Tien-Yien Li & James Yorke, "Period three implies chaos"**, *American Mathematical Monthly* 82 (1975). 짧고, 사잇값 정리만 알면 읽을 수 있다.
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press). 학부생을 위해 쓴 책으로, 텐트 사상, 로지스틱 사상, 샤르코우스키 정리를 완전한 증명과 함께 다룬다.
- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011). 덮개 도표를 이용한 현대적인 증명이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 8.8절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/period-three.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com