8.7 풀 수 있는 혼돈

학습지

문제

STEP I 2014, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** $s = \sin^2\theta$일 때 식 $4s(1-s)$를 어디서 본 적이 있는가? $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$, $\sin 2\theta$를 이어 주는 항등식(identity)은 무엇인가?

1단계 패턴 추측하기

다루는 내용: 소문항 (i), 추측

> **생각해 보기** $u_0 = \sin^2\theta$일 때 $1 - u_0$은 무엇인가? 배각 공식(double-angle formula)을 이용하여 u_1을 하나의 제곱으로 나타내어라. 그다음 u_2도 구해 보아라.

2단계 증명하기

다루는 내용: 소문항 (i), 증명

생각해 보기 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 추측을 증명하여라. 귀납 단계는 θ 대신 $2^n\theta$를 넣는다는 점만 빼면 u_1을 구할 때와 같은 계산이다.

3단계 변수 바꾸기

다루는 내용: 소문항 (ii), p, q, r에 대한 조건

잠깐, 직접 해 보기 $v_n = \alpha u_n + \beta$를 v_{n+1}에 대한 점화식에 대입하고 u_{n+1}에 대하여 정리하여라. 이것을 $4u_n - 4u_n^2$과 비교하라. 식은 몇 개 나오고 미지수는 몇 개인가? 남는 식 하나가 바로 조건이다.

4단계 예제

다루는 내용: 소문항 (ii), 예제

> **생각해 보기** p, q, r를 읽어 내고 조건을 확인하여라. α와 β, 그리고 초깃값 u_0을 구하여라. $\sin^2\theta = u_0$을 만족하는 각 θ는 무엇인가?

숨은 수학

수열이 예측 불가능한 이유

공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$는 이야기의 끝처럼 보인다. 어떤 항이든 직접 계산할 수 있기 때문이다. 하지만 이 공식이 무엇을 말하는지 살펴보자. $\sin^2$의 주기는 π이므로 $2^n\theta$를 π로 나눈 나머지만 의미가 있다. $0 \le x < 1$인 x로 $\theta = \pi x$라 쓰고, x를 이진법(binary)으로 나타내자.

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots \quad (\text{밑}2).$$

2를 곱하면 소수점이 오른쪽으로 한 자리 이동하고, 그 결과를 1로 나눈 나머지를 취하면 소수점을 넘어간 자릿수가 버려진다. 따라서 u_n은 x의 이진 자릿수 가운데 b_{n+1} 이후의 것에만 의존한다. 로지스틱 사상의 각 단계는 시작값의 자릿수를 하나 더 읽고, 맨 앞의 자릿수 하나를 버린다.

이것이 혼돈의 결정적 특징인 **초기 조건에 대한 민감한 의존성**(sensitive dependence on initial conditions)이다. 이진법으로 20자리(십진법으로 약 여섯 자리)까지 일치하는 두 시작값은 대체로 약 20단계 동안 일치하는 수열을 만들고, 그 뒤에는 서로 아무 관계가 없어진다(그림 8.7.1). u_{100}을 예측하려면 u_0을 이진법으로 100자리까지 알아야 한다. 시작 각의 오차는 아무리 작더라도 매 단계 두 배가 된다. (개체 수 u 자체의 오차는 매번 정확히 같은 비율로 커지지는 않는다. 사상이 $[0,1]$의 어떤 부분은 다른 부분보다 더 많이 늘리기 때문이다. 그러나 평균적으로는 같은 비율로 커진다.) 공식이 도움이 되는 것은 아니다. 공식은 그저 그 메커니즘을 눈에 보이게 해 줄 뿐이다.

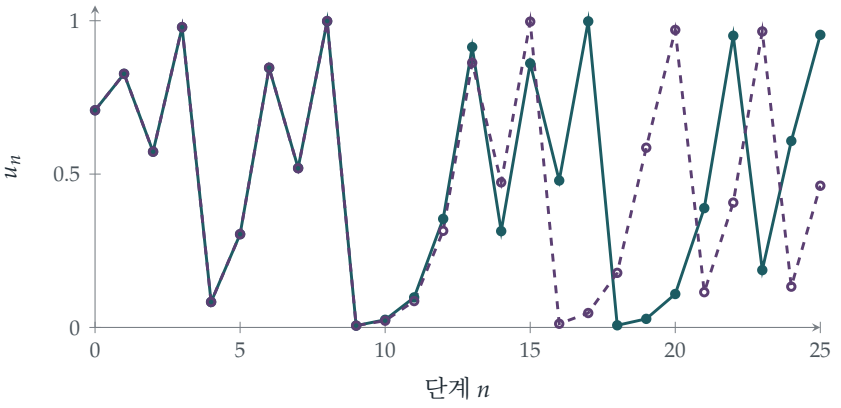


그림 8.7.1 $k = 4$인 로지스틱 사상에서 $\sin^2(1)$(청록색)과 $\sin^2(1.00001)$(자주색, 점선)로 시작하는 두 수열. 약 열 단계 동안은 구별할 수 없고, 12단계에서는 눈에 띄게 달라지며, 그 뒤로는 서로 무관하다. 12단계까지 각의 차이 10^{-5}는 열두 번 두 배가 되어 약 $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$가 된다.

어디에나 있는 주기점

이 공식으로 사상의 모든 순환도 찾을 수 있다. 수열이 N단계 뒤에 시작값으로 돌아오는 것은 정확히 $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$일 때, 즉 $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$일 때이다. 따라서 $\theta = m\pi/(2^N - 1)$ 또는 $\theta = m\pi/(2^N + 1)$은 주기가 N의 약수인 점을 준다. 예를 들어 $\theta = \pi/5$는 $4\theta \equiv -\theta$를 만족하므로 $\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$는 2-순환이다. 모든 주기의 주기점(periodic point)이 존재하며, 이들은 $[0,1]$에서 조밀(dense)하다. 즉 아무리 작은 구간에도 수열이 반복되는 시작값이 있다. 그런데도 오차가 두 배씩 커지므로 이들은 모두 불안정하다. 주변의 모든 것을 밀어내는 조밀한 주기점은 혼돈의 두 번째 특징이다.

혼돈에 이르는 길

k가 더 작으면 공식이 없고, 행동 양상은 k에 따라 극적으로 달라진다(그림 8.7.2). $1 < k < 3$이면 $(0,1)$에서 시작하는 모든 수열이 고정점(fixed point) $1 - 1/k$로 수렴한다. $k = 3$에서 고정점이 불안정해지고 2-순환이 그 자리를 차지한다(이것이 STEP II 2002 Q5의 주제이다. 연습문제를 보라). $k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$에서 2-순환은 4-순환에, 이어서 8-순환에 자리를 내주며, 주기 배가(period doubling)는 점점 더 빨리 일어나다가 $k \approx 3.5699$에서 순환의 길이가 무한대가 되고 혼돈이 시작된다. 혼돈 영역 안에는 질서의 창이 있다. 가장 뚜렷한 것은 $k = 3.83$ 근처에 있으며 3-순환을 포함하는데, 이것이 Section 8.8의 주제이다.

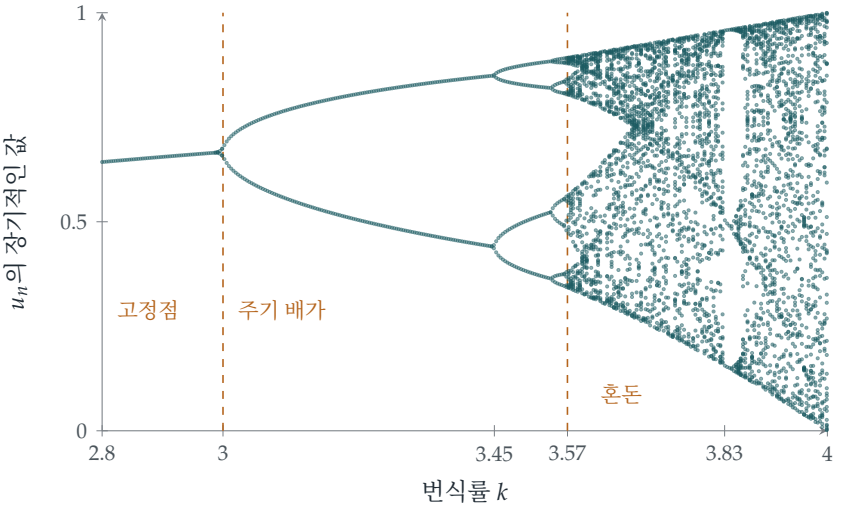


그림 8.7.2 로지스틱 사상의 분기 도표(bifurcation diagram). 각 k에 대하여 $u_0 = 0.31416$에서 시작해 사상을 300번 반복한 뒤 그다음 40개의 값을 찍었다. 하나의 고정점이 $k = 3$에서 2-순환으로 갈라지고, 이어서 4, 8, ...로 갈라지다가 $k = 3.57$ 근처에서 혼돈이 시작된다. $k = 3.83$ 근처의 옅은 세로 틈은 안정한 3-순환을 포함하는 창이다. $k = 4$에서는 값들이 $[0, 1]$ 전체를 채운다.

파이겐바움 상수

1975년 로스앨러모스(Los Alamos)에서 일하던 미첼 파이겐바움(Mitchell Feigenbaum)은 프로그래밍이 가능한 휴대용 계산기로 주기가 두 배가 되는 k의 값 $k_1 = 3$, $k_2 \approx 3.4495$, $k_3 \approx 3.5441$, $k_4 \approx 3.5644$, ...를 측정했다. 그는 그 간격이 일정한 비율로 줄어든다는 것,

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

을 알아챘고, 놀랍게도 같은 수 $4.6692\ldots$가 $x \mapsto k\sin(\pi x)$에서도, 그리고 꼭대기가 포물선처럼 둥근 봉우리 하나를 가진(**이차 극대**(quadratic maximum)) 다른 모든 매끄러운 사상에서도 나타난다는 것을 발견했다. 이 상수는 그 부류 전체에 대하여 **보편적**(universal)이다. $-x^4$ 모양처럼 봉우리 꼭대기가 더 평평한 사상들은 저마다의 보편 상수를 가진다. 이 상수는 그 뒤 물방울이 떨어지는 수도꼭지, 가열된 유체, 전자 회로에 대한 실험에서도 측정되었다. 그 이유를 설명하려면 상전이 물리학에서 빌려 온 아이디어가 필요했고, 1982년에야 Oscar Lanford가 컴퓨터의 도움을 받아 엄밀하게 증명했다.

같은 기법, 세 번

소문항 (ii)의 치환은 **켤레**(conjugacy)의 한 예이다. 변수변환으로 한 사상을 다른 사상으로 바꿀 수 있으면 두 사상은 켤레라 하고, 이때 두 사상은 정확히 같은 동역학을 가진다. 이

문제는 조건을 만족하는 모든 이차 사상이 $k = 4$인 로지스틱 사상과 켤레임을 보여 주며, 로지스틱 사상은 다시 $u = \sin^2\theta$를 통해 모습을 바꾼 각 배가 사상이다. (엄밀히 말하면 이 마지막 연결은 **반켤레**(semiconjugacy)이다. θ와 $\pi - \theta$가 같은 u를 주므로 이 변수변환은 일대일(one-to-one)이 아니다. 로지스틱 사상은 $[0,1]$에서 일대일인 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$를 통해, $t \le \frac{1}{2}$일 때 $t \mapsto 2t$이고 $t \ge \frac{1}{2}$일 때 $t \mapsto 2 - 2t$인 **텐트 사상**(tent map)과 진정으로 켤레이다.) Section 2.8에서 만난 $x \mapsto x^2 - 2$는 $x = 2\cos\theta$로 풀렸고 각이 매 단계 두 배가 되었다. 이 사상도 조건을 만족한다(확인해 보라). 따라서 이것들은 모두 모습만 바꾼 같은 사상이다. Section 8.8에서는 이 가족의 세 번째 구성원, 즉 직선으로 만든 사상인 **텐트 사상**이 등장한다.

더 도전하기

1 **로지스틱 사상의 순환.** STEP II 2002, 5번 문제 (step.maths.org/questions/02-s2-q5)를 풀어 보라. 그런 다음 2-순환은 $k > 3$일 때에만 존재함을 보여라.

2 **제곱하고 2 빼기.** $v_{n+1} = v_n^2 - 2$가 소문항 (ii)의 조건을 만족함을 보여라($p = -1$로 두고 $-pv_n^2 + qv_n + r$ 꼴로 써라). α와 β를 구하고, 그 답이 $v_n = 2\cos(2^n\phi)$와 일치하는지 확인하라.

3 **3-순환.** 공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$를 이용하여 $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$의 3-순환을 구하라. (힌트: $\theta = \pi/7$이나 $\theta = \pi/9$를 시도해 보라.) 주기가 정확히 3인 점은 몇 개인가?

4 **사라지는 자릿수.** 컴퓨터는 수를 이진법으로 약 53자리까지 저장한다. 컴퓨터로 $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$을 반복하면 대략 몇 단계 뒤에 계산된 값이 참인 수열과 아무 관계가 없어지는가? 그렇다면 그때 계산된 수열은 쓸모없는가?

더 읽을거리

- **Robert May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics"**, *Nature* 261 (1976). 고전이며, 지금도 매우 읽기 쉽다.
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science*** (Penguin). 메이, 파이겐바움, 그리고 혼돈의 발견에 관한 이야기이다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press), 10장. 1차원 사상, 로지스틱 사상, 파이겐바움 상수를 대학 1학년 수준에서 다룬다.
- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?*** (Penguin). 혼돈을 대중적으로 소개하는 책으로, 로지스틱 사상에 관한 좋은 장이 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 8.7절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/solvable-chaos.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com