8.6 양자 진동자

학습지

문제

STEP III 1988, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q7

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** $e^{-\lambda x^2}$ 같은 함수가 왜 그럴듯한 추측일까? $x \to \pm\infty$일 때 $e^{-\lambda x^2}$와 그 도함수는 어떻게 되는가?

1단계 바닥 상태

다루는 내용: $n = 0$인 경우

생각해 보기 $y_0 = e^{-\lambda x^2}$를 두 번 미분하여 $n = 0$인 방정식에 대입한다. 지수함수로 양변을 나눈다.

잠깐, 직접 해 보기 결과는 모든 x에 대하여 성립해야 하므로 x^2의 계수(coefficient)와 상수항을 비교한다. 두 조건을 모두 만족하는 λ는 무엇인가? λ가 양수여야 하는 이유는 무엇인가?

2단계 첫 번째 들뜬 상태

다루는 내용: $n = 1$인 경우

생각해 보기 $y_1 = xe^{-\lambda x^2}$와 $n = 1$에 대하여 같은 과정을 반복한다. 같은 λ 값이 성립하는가?

3단계 항등식

다루는 내용: 항등식

생각해 보기 곱의 미분법(product rule)으로 $y_m y_n' - y_n y_m'$을 미분한다. 두 항이 소거된다. 그런 다음 y_n''과 y_m''에 대한 미분방정식(differential equation)을 이용한다.

4단계 직교성

다루는 내용: 직교성

> **잠깐, 직접 해 보기** 항등식을 $-\infty$에서 ∞까지 적분한다. 무한대에서의 조건을 고려하면 좌변은 무엇인가? $2(m-n)\omega$로 나눌 수 있는 이유는 무엇인가?

숨은 수학

슈뢰딩거 방정식

1926년에 에르빈 슈뢰딩거(Erwin Schrödinger)는 양자 입자가 **파동함수**(*wave function*) $\psi(x)$로 기술된다고 제안했다. 퍼텐셜 $V(x)$ 안에서 에너지가 E인 입자의 파동함수는

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

를 만족한다. 용수철의 경우 $V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2x^2$이고, x의 척도를 바꾸면 이는 정확히 문제의 방정식이 되며, 이때 $E = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\Omega$이다. ψ가 무한대에서 사라져야 한다는(그래야 입자가 어딘가에 존재한다는) 물리적 요구는 이 에너지들에서만 충족될 수 있다. 이것이 바로 수학에서 저절로 튀어나오는 **양자화**(*quantisation*)이다. 가장 낮은 에너지가 0이 아니라 $\frac{1}{2}\hbar\Omega$임에 주목하라. 양자 진동자는 결코 완전히 정지해 있을 수 없다. 이 **영점 에너지**(*zero-point energy*)는 실재하며 측정할 수 있다. 액체 헬륨이 보통 압력에서는 절대영도에서도 얼지 않는 것이 바로 이 때문이다.

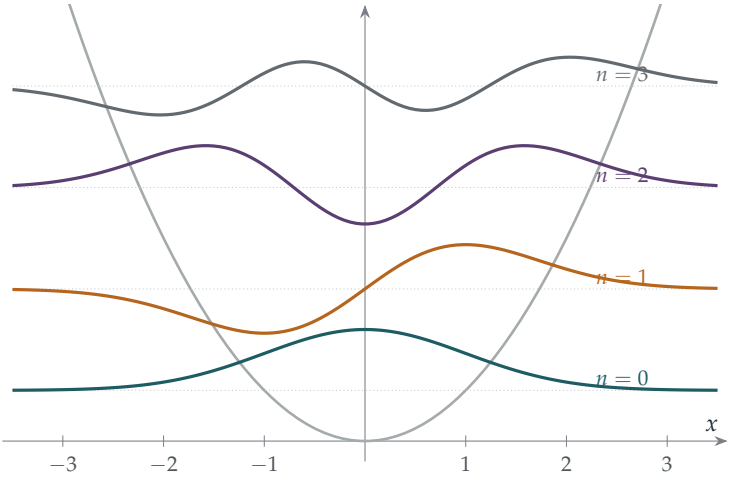

그림 8.6.1 양자 조화 진동자($\omega = 1$인 경우). 포물선은 퍼텐셜 에너지이다. 각 파동함수 y_n은 그 에너지 준위 $n + \frac{1}{2}$의 높이에 그려져 있다. 준위들은 같은 간격으로 놓여 있고, 가장 낮은 준위는 0보다 위에 있다. 함수 y_n은 n번 0을 지나며, 어느 두 함수도 서로 직교한다.

에르미트 함수와 스튀름–리우빌 이론

일반적인 해는 $y_n = H_n(\sqrt{\omega}x)e^{-\omega x^2/2}$이며, 여기서 H_n은 n차 다항식인 **에르미트 다항식**(*Hermite polynomial*)이다(그림 8.6.1). 직교성은 이 방정식에만 있는 특별한 성질이 아니다. 방정식을 적절한 경계 조건과 함께 $(py')' + qy = -\lambda w y$ 꼴로 쓸 수 있으면, 서로 다른 λ 값에 속하는 해들은 4단계와 똑같은 논증에 의해 직교한다. 이것이 **스튀름–리우빌 이론**(*Sturm–Liouville theory*)(1830년대)이며, 푸리에 급수의 사인 함수(Section 3.7), 북의 진동, 정전기학의 르장드르 다항식(Legendre polynomial), 수소 원자의 파동함수를 모두 아우른다. Section 4.7의 고유값 문제(eigenvalue problem)도 또 하나의 예이다. 거기서 구한 임계값들이 고유값 λ이고, 직교하는 함수들은 그 계의 자연스러운 "모드(mode)"이다.

더 도전하기

1 **다음 상태.** $\lambda = \frac{\omega}{2}$일 때 $y_2 = (4\lambda x^2 - 1)e^{-\lambda x^2}$이 $n = 2$인 방정식을 만족함을 보여라. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2}\,dx = \sqrt{\pi/\omega}$와 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\omega x^2}\,dx = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$를 이용하여 $\int_{-\infty}^{\infty} y_0 y_2\,dx = 0$임을 직접 확인하라.

2 **다른 에너지는 없다.** n을 일반적인 수 ν로 바꾼 방정식에 $y = e^{-\lambda x^2}$을 대입해 보라. 이것이 $\nu = 0$일 때만 성립함을 보여라. (사실 감소하는 해는 ν가 음이 아닌 정수일 때만 존재한다.)

3 **사인파.** $y(0) = y(\pi) = 0$인 $y'' = -n^2 y$에서 출발하여, 같은 방법으로 $m \neq n$일 때 $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \, dx = 0$임을 보여라.

4 **사다리.** y_n이 방정식의 해이면 $y_{n+1} = \omega x y_n - y_n'$은 n 대신 $n+1$을 넣은 방정식의 해임을 보여라. 이를 이용하여 y_0으로부터 y_1과 y_2를 만들어라. (이것이 양자역학의 "올림 연산자(raising operator)"이다.)

더 읽을거리

- **David Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*** (Cambridge University Press). 『양자역학 입문』. 학부 물리학의 표준 교재로, 2장에서 조화 진동자를 다룬다.
- **리처드 파인만(Richard Feynman), *QED: The Strange Theory of Light and Matter*** (Princeton University Press). 『QED: 빛과 물질의 신기한 이론』. 양자역학의 대가 가운데 한 사람이 쓴 대중적인 해설서이다.
- **Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*** (Wiley). 『물리과학을 위한 수학적 방법』. 수학과 물리학을 공부하는 학생을 위해 에르미트 다항식과 스튀름–리우빌 이론을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 8.6절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/quantum-oscillator.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com