8.5 그레이하운드를 쫓는 그레이하운드

학습지

문제

STEP III 1988, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s3-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 대칭성에 따르면, 네 마리 개는 매 순간 어떤 도형을 이루는가? 그 도형의 중심은 어디인가?

1단계 운동 방향

다루는 내용: 속도와 반지름 사이의 각

> ? **생각해 보기** A는 B를 향해 곧장 달린다. 삼각형 OAB에서 각의 크기는 각각 얼마인가? AB가 AO와 이루는 각은 얼마인가?

2단계 미분방정식

다루는 내용: 경로 구하기

잠깐, 직접 해 보기 A의 속도(velocity)를 지름 방향 성분(radial component) $\dot{r}$와 가로 방향 성분(transverse component) $r\dot{\theta}$로 나눈다. 한 성분을 다른 성분으로 나누어 $\frac{dr}{d\theta}$를 구한 다음, 미분방정식(differential equation)을 푼다.

3단계 개 n마리

다루는 내용: 개 n마리로의 일반화

> **생각해 보기** 정n각형(regular n-gon)에서 삼각형 OAB의 꼭짓점 O에서의 각은 얼마인가? 두 밑각은 각각 얼마인가? 45° 대신 이 각을 넣어 두 번째 단계를 다시 해 본다.

숨은 수학

무한히 많은 회전, 유한한 거리

동경 방향 속력 $\dot r = -v\sin\frac{\pi}{n}$은 일정하므로, 개들은 시간 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ 뒤에 중심에 도달하고, 각자 거리 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$를 달린다. 한 변의 길이가 s인 정n각형에서는 $r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$이므로, 각 개가 달리는 거리는

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

이다. 개가 네 마리일 때 이 값은 정확히 s이다. 즉 각 개는 정확히 한 변의 길이만큼 달린다. (이것을 깔끔하게 보는 방법이 있다. B의 속도는 항상 AB에 수직이므로 거리 AB를 바꾸지 않는다. 오직 AB를 따라 곧장 속력 v로 움직이는 A의 운동만이 간격을 좁히며, 처음 간격은 s이다.) 개가 세 마리일 때 거리는 $\frac{2}{3}s$이고, 여섯 마리일 때는 $2s$이다. 그런데도 모든 경우에 나선은 중심 둘레를 무한히 많이 감아 도는데, $r \to 0$일 때 $\theta \to \infty$이기 때문이다. 길이가 유한하면서 무한히 많이 회전하는 곡선은 역설이 아니다. 회전이 충분히 빠르게 작아지기 때문이다.

로그 나선

곡선 $r = \lambda e^{-k\theta}$를 **로그 나선**(logarithmic spiral) 또는 **등각 나선**(equiangular spiral)이라 한다. 이 곡선은 중심에서 뻗어 나가는 모든 반직선과 같은 각도로 만난다. 모양을 유지하는 성장이 이 곡선을 만들어 내므로, 앵무조개의 껍데기나 일부 은하의 나선팔처럼 자연에서도

나타난다. 야코프 베르누이(Jacob Bernoulli)는 이 곡선에 너무나 매료되어, 자신의 묘비에 *Eadem mutata resurgo*("변하여도 나는 같은 모습으로 다시 일어나리라")라는 문구와 함께 이 곡선을 새겨 달라고 부탁했다. 이 문구는 로그 나선이 어떤 배율에서 보아도 똑같아 보인다는 사실을 가리킨다. 그러나 석공은 그 대신 아르키메데스 나선(Archimedean spiral)을 새겼다.

실제 세계의 추적

항상 목표물을 곧장 향하는 "순수 추적"(pure pursuit)은 미사일이나 포식자에게 가장 단순한 유도 법칙이다. 하지만 최선은 아니다. 목표물이 **앞으로** 있을 곳을 향하는 방식("비례 항법"(proportional navigation))이 더 효율적이며, 현대의 미사일과 잠자리, 매 같은 일부 포식자가 실제로 쓰는 방식이 바로 이것이다. 추적과 회피의 수학은 20세기에 **미분 게임**(differential games)이라는 이름으로 독자적인 분야가 되었다.

더 도전하기

1. **깔끔한 논증.** 개 네 마리 문제에서 거리 AB가 정확히 비율 v로 줄어드는 이유를 꼼꼼히 설명하고, 이로부터 개들이 시간 s/v 뒤에 만난다는 것을 유도하여라.

2. **개 세 마리.** 개 세 마리가 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 꼭짓점에서 출발한다. 각 경로의 방정식, 만날 때까지 걸리는 시간, 각 개가 달리는 거리를 구하여라.

3. **몇 바퀴일까?** 중심에서 100 m 떨어진 곳에서 출발한 개 네 마리는 한 바퀴를 완전히 돈 뒤 중심에 얼마나 가까워지는가? 몇 바퀴를 완전히 돌아야 중심으로부터 1 mm 이내에 들어오는가?

4. **개 두 마리.** $n = 2$(서로 마주 보는 개 두 마리)일 때는 어떻게 되는가? 공식이 여전히 의미가 있는가?

더 읽을거리

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*** (Princeton University Press). 추적과 회피의 수학. 부게에서 미사일까지, 추적 곡선에 관한 모든 것을 다룬다.
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number*** (Princeton University Press). 수 e의 이야기. 로그 나선과 베르누이의 묘비 이야기가 실려 있다.
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*** (Cambridge University Press). 성장과 형태에 관하여. 나선 성장을 포함하여 자연 속의 수학을 다룬 고전이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 8.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/pursuit.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com