8.4 원으로 감겨드는 나선

학습지

문제

STEP III 2015, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q8

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** 두 방정식에는 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$와 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$라는 조합이 숨어 있다. 이들을 극좌표로 나타내면 무엇인가?

1단계 극좌표(polar coordinates)로 푸는 소문항 (i)

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 주어진 방정식을 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$와 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$로 이루어지도록 정리한다. 전개하여 확인해 본다.

잠깐, 직접 해 보기 이 두 조합을 각각 $r\,\mathrm{d}r$와 $r^2\,\mathrm{d}\theta$로 바꾼다. θ에 대한 r의 미분방정식(differential equation)으로 어떤 식을 얻는가? 그 방정식을 풀어 본다.

2단계 소문항 (ii)

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 새 방정식은 원래 방정식에 $x^2 + y^2 = r^2$를 포함하는 항들을 더한 것이다. 새로 생긴 항들을 묶어 본다. 두 조합 가운데 어느 것이 나타나는가?

잠깐, 직접 해 보기 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r$를 얻어야 한다. $u = r^{-2}$로 놓는다. u는 어떤 선형(linear) 방정식을 만족하는가?

3단계 세 종류의 해

다루는 내용: 해의 모양

생각해 보기 $r^2 = \frac{1}{1+Ae^{2\theta}}$를 $A = 0$, $A > 0$, $A < 0$인 경우로 나누어 살펴본다. 각 경우에 $\theta \to -\infty$일 때와 θ가 증가할 때 r는 어떻게 되는가? $A < 0$일 때 θ는 어떤 값을 가질 수 있는가?

숨은 수학

극한 순환

앙리 푸앵카레(Henri Poincaré)는 1880년대에 평면 위 미분방정식의 정성적 거동을 연구하면서 극한 순환을 도입했다. 문제의 방정식을 평면 위를 움직이는 점의 경로를 나타내는 것으로 해석해 보자. 단위원은 고립된 닫힌 궤도(orbit)이고, 그 근처의 모든 궤도는 (시간의 방향에 따라) 단위원을 향해 감겨 들어가거나 단위원에서 멀어진다. 1926년 네덜란드의 공학자 발타사르 판데르폴(Balthasar van der Pol)은 진공관이 들어간 전기 회로에서 극한 순환을 발견했고, 비슷한 방정식이 심장 박동을 묘사한다고 제안했다. 극한 순환은 스스로 유지되는 안정된 리듬을 가진 모든 계의 모형이 된다. 일주기 생체 시계, 신경 자극, 포식자와 피식자 개체 수의 순환이 그 예이다.

평면에는 혼돈이 없다

푸앵카레–벤딕손 정리(*Poincaré–Bendixson theorem*)에 따르면, 평면 위의 매끄러운 계에서 유계인 영역에 머무르면서 평형점(equilibrium)에 다가가지 않는 궤도는 반드시 닫힌 궤도에 다가간다. 따라서 2차원에서 장기적인 거동은 평형점과 순환에 한정된다. 궤도끼리 교차할 수 없으므로 혼돈(chaos)이 생길 여지가 없다. 혼돈에는 적어도 3차원이 필요한데, 이는 1963년 에드워드 로렌즈(Edward Lorenz)가 대류를 나타내는 유명한 세 변수 모형("나비")으로 발견한 사실이다. 이산 시간에서는 Section 8.7에서 보듯이 1차원에서도 혼돈이 가능하다.

풀리지 않은 문제

1900년 다비트 힐베르트(David Hilbert)는 그의 열여섯 번째 문제의 일부로 다음을 물었다. P와 Q가 n차 다항식일 때, 계 $x' = P(x,y)$, $y' = Q(x,y)$가 가질 수 있는 극한 순환의 최대 개수는 얼마인가? 이는 $n = 2$일 때조차 아직 알려져 있지 않다. 이 경우 극한 순환이 네 개인 계는 알려져 있지만, 그보다 많을 수 있는지는 모른다. 이것은 힐베르트의 문제 가운데 완전히 미해결로 남아 있는 아주 드문 문제 중 하나이다.

더 도전하기

1 **나선.** 소문항 (i)의 해 $r = e^{-\theta}$에 대하여, 이 곡선이 원점에서 나가는 모든 반직선과 같은 각 45°로 만남을 보여라. (로그 나선을 **등각** 나선(equiangular spiral)이라고 부르는 이유가 이것이다.)

2 **극좌표 항등식.** $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$와 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$를 증명하라.

3 **시간에 따른 계.** 계 $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$을 생각하자. $r(0) > 0$인 모든 해가 $t \to \infty$일 때 단위원에 다가감을 보여라. 이 계를 x와 y로 나타내라.

4 **두 개의 순환.** $r = 1$과 $r = 2$에 극한 순환을 두 개 가지며, 하나는 끌어당기고 하나는 밀어내는, $\dot{r} = f(r)$, $\dot{\theta} = 1$ 꼴의 계를 찾아라.

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 7장에서 극한 순환과 푸앵카레–벤딕손 정리를 다룬다.
- **Steven Strogatz, *Sync*** (Hyperion). 자연의 리듬과 동기화를 다룬 교양서이다.
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science*** (Penguin). 로렌즈와 혼돈의 발견 이야기이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 8.4절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/limit-cycle.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com