8.3 개체군 수확하기

학습지

문제

STEP II 1995, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q8

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 무엇이든 풀기 전에, 증가율 $(2K - x)x$를 x의 함수(function)로 보고 그래프를 그려 보자. 어디에서 0이 되는가? 어디에서 양수인가? 이로부터 x가 어떻게 움직일지 알 수 있는가?

1단계 로지스틱 방정식 풀기

다루는 내용: 개체를 제거하지 않을 때의 개체 수

생각해 보기 변수를 분리하고(separation of variables) $\frac{1}{(2K-x)x}$를 부분분수(partial fractions)로 분해한다.

생각해 보기 $t=0$일 때 $x=K$임을 이용하여 상수를 구한다. 그런 다음 x에 대하여 식을 정리하고 $t \to \infty$일 때 어떻게 되는지 살펴본다.

2단계 수확(harvesting)

다루는 내용: 비율 L로 제거할 때

> **생각해 보기** 박테리아를 비율 L로 제거하면 증가율에서 L을 빼게 된다. $(2K - x)x - L$을 완전제곱식(completing the square)으로 고치고, $K^2 - L = \alpha^2$으로 놓는다.

> **잠깐, 직접 해 보기** $y = x - K + \alpha$로 치환한다. y는 어떤 방정식을 만족하고, $y(0)$은 얼마인가? K 대신 α가 들어간 것으로 보고 첫 번째 부분과 비교해 본다.

숨은 수학

티핑 포인트

수확이 있는 방정식에는 두 평형점 $K + \alpha$와 $K - \alpha$가 있다. 위쪽 평형점은 **안정**(*stable*)하다. 개체군이 그보다 약간 크거나 작아도 다시 그 값으로 돌아온다. 아래쪽 평형점은 **불안정**(*unstable*)하다. $K - \alpha$보다 조금이라도 작은 개체군은 줄어들어 멸종한다. 수확률 L이 커지면 $\alpha = \sqrt{K^2 - L}$이 작아지고 두 평형점은 서로 가까워진다. $L = K^2$에서 두 평형점은 하나로 합쳐지고, $L > K^2$이면 평형점이 전혀 없어 모든 개체군이 붕괴한다(그림 8.3.1).

이것이 **안장-마디 분기**(*saddle-node bifurcation*)로, 가장 단순한 종류의 **티핑 포인트**(*tipping point*)이다. 무서운 점은 이를 미리 알려 주는 극적인 징후가 전혀 없다는 것이다. L이 K^2에 가까워지는 동안 평형 개체군은 완만하게 줄어들 뿐이다가, 갑자기 평형이 사라진다. 그 뒤에 수확량을 줄여도 소용이 없을 수 있는데, 개체군이 이미 불안정한 문턱값 아래로 내려갔을 수 있기 때문이다.

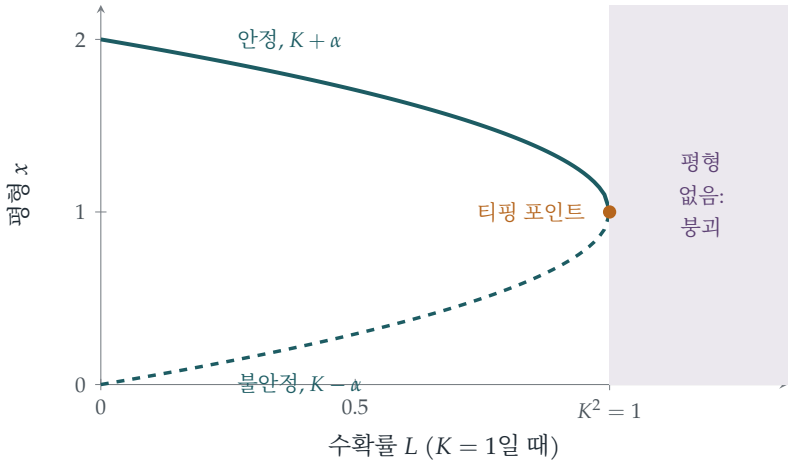

그림 8.3.1 $K=1$일 때 수확률 L에 따른 평형 개체군. 안정 평형점(실선)과 불안정한 문턱값(점선)은 L이 커질수록 서로 가까워지다가 $L=K^2$에서 만난다. 그보다 크면 평형점이 존재하지 않고, 개체군은 크기와 관계없이 붕괴한다.

최대 지속 가능 수확량

개체군이 지속적으로 감당할 수 있는 가장 큰 수확량은 얼마일까? 그것은 증가율 $(2K-x)x$의 최댓값인 $L=K^2$이며, 개체군을 수용력의 절반인 K로 유지할 때 얻어진다. 수산학은 20세기 중반에 이 "최대 지속 가능 수확량(maximum sustainable yield)"을 관리 목표로 채택했다. 그러나 정확히 최댓값만큼 수확하면 계는 정확히 티핑 포인트에 놓이게 되고, 그곳에서는 K를 아주 조금만 과대평가하거나 한 해만 흉년이 들어도 붕괴가 일어난다. 뉴펀들랜드(Newfoundland) 앞바다의 그랜드뱅크스(Grand Banks) 대구 어장은 500년 동안 세계에서 가장 풍요로운 어장 가운데 하나였지만 1990년대 초에 붕괴했고, 1992년 캐나다 정부는 조업 중단 조치(moratorium)를 내려 수만 명이 일자리를 잃었다. 어족 자원은 아직도 완전히 회복되지 않았다.

다른 곳의 로지스틱 성장

로지스틱 방정식은 1838년 페르휠스트(Pierre-François Verhulst)가 인구를 모형화하기 위해 제안했다. 같은 S자 곡선이 초기 단계의 전염병 확산, 신기술의 보급, 자기촉매 화학 반

응, 종양의 성장을 설명한다. 이산 시간 버전인 로지스틱 **사상**(*map*)은 매우 다르게 행동한다. Section 8.7에서 보겠지만, 이 사상은 카오스적(chaotic)일 수 있다.

더 도전하기

1 **낮은 곳에서 출발하기.** 수확이 있고 $K^2 > L$일 때, $x(0) < K - \alpha$이면 개체군이 유한한 시간 안에 0에 도달함을 보여라. (**힌트**: $y(0) < 0$이면 y는 어떻게 되는가?)

2 **남획.** $L > K^2$이면 $\beta = \sqrt{L - K^2}$로 두자. $x(0) = 2K$일 때 $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$을 풀고, 개체군이 0에 도달하는 시각을 구하여라.

3 **비례 수확.** 대신 개체군의 일정한 **비율**을 제거한다고 하자: $x' = (2K - x)x - hx$. 평형점을 구하고, 모든 $h < 2K$에 대하여 개체군이 살아남음을 보여라. 이 정책이 더 안전한 이유는 무엇인가?

4 **도달 시간.** 수확이 없는 경우, 개체군이 $\frac{3}{2}K$에 도달하는 시각을 구하여라.

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 비선형 동역학과 카오스. 3장은 분기를 다루며, 이 수확 모형이 연습문제로 나온다.
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology*** (Springer). 학부생을 위한 개체군 모형.
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World*** (Penguin). 대구 어업의 역사와 그 붕괴.

안내에 따른 전체 풀이는 제 8.3절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/harvesting.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com