8.2 풀지 않고 범위 구하기

학습지

문제

STEP III 2013, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q7

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 소문항 (i)에서 y를 입자의 위치로, x를 시간으로 생각하자. 그러면 $y'' = -y^3$은 힘이 $-y^3$인 뉴턴(Newton)의 법칙이다. 운동 에너지(kinetic energy)와 위치 에너지(potential energy)는 무엇인가?

1단계 보존

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 연쇄법칙(chain rule)을 써서 E를 x에 대하여 미분하고, $2y'$으로 묶어 낸다. 남은 괄호에 대하여 미분방정식(differential equation)은 무엇을 말해 주는가?

생각해 보기 따라서 E는 상수이다. $x = 0$에서 그 값을 구한다. $(y')^2 \geq 0$이므로, 이것은 y^4에 대하여 무엇을 알려 주는가?

2단계 소산

다루는 내용: 소문항 (ii)

> **잠깐, 직접 해 보기** 다시 E를 미분하고, 방정식을 이용하여 $v'' + \sinh v$를 바꾸어 쓴다. $x \geq 0$일 때 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}$의 부호는 무엇인가? $\mathrm{E}(x)$를 $\mathrm{E}(0)$과 비교하고, $\cosh(\ln 3)$의 값을 계산한다.

3단계 에너지 만들어 내기

다루는 내용: 소문항 (iii)

잠깐, 직접 해 보기 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$로 놓아 본다. 이를 미분한 뒤, 방정식으로 w''을 바꾸어 쓰면 $(w')^2$의 상수배만 남도록 $F'(w)$를 정한다. 도함수(derivative)가 $w\cosh w$인 함수가 필요할 것이다. $w\sinh w$를 미분해 보라.

생각해 보기 $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$임을 보이려면, 이 식을 e^{x}와 e^{-x}로 나타내고 완전제곱식(perfect square)을 찾아본다. 그런 다음 $\mathrm{E}(x)$를 $\mathrm{E}(0)$과 비교한다. $w\sinh w$의 부호는 무엇인가?

숨은 수학

랴푸노프 함수

1892년 박사 학위 논문에서 랴푸노프는 운동의 **안정성**(*stability*)을 연구했다. 계를 평형(equilibrium)에서 살짝 흐트러뜨리면 다시 돌아오는가, 아니면 멀리 떠나가는가? 그의 "제2방법"은 평형에서 가장 작고 해를 따라 절대 증가하지 않는 함수, 오늘날 **랴푸노프 함수**(*Lyapunov function*)라고 부르는 함수를 찾는 것이었다. 그러면 평형 근처에서 출발한

해는 계속 그 근처에 머문다. 이 방법의 아름다움은 해의 공식이 전혀 필요 없고 미분방정식 자체만 있으면 된다는 데 있으며, 이 문제가 보여 주는 것이 바로 그 점이다. 오늘날 랴푸노프 함수는 항공기 제어 시스템에서 전력망, 생태계에 이르기까지 온갖 것의 안정성을 증명하는 데 쓰인다.

물리학과 공학에서의 에너지

소문항 (i)은 비선형 진동자(nonlinear oscillator)이다. 용수철과 비슷하지만, 복원력(restoring force)이 변위(displacement)의 세제곱에 비례한다. 단순 조화 진동자(simple harmonic oscillator)와 달리 주기(period)가 진폭(amplitude)에 따라 달라지지만(진동이 클수록 빠르다), 에너지 보존 때문에 여전히 갇혀 있다. 소문항 (ii)는 시간에 따라 커지는 감쇠(damping)를 더하며, 에너지가 빠져나간다. 공학에서는 구조물이 스스로 흔들려 부서지지 않는다는 것, 제어 시스템이 통제를 벗어나 진동하지 않는다는 것을 보이는 데 에너지 방법(energy method)이 쓰인다. 편미분방정식(partial differential equation) 이론에서는 이런 종류의 "에너지 추정(energy estimate)"이 해가 존재하고 잘 행동함을 증명하는 주된 도구이다. 유체 흐름 방정식에 관한 문제들, 그 가운데 밀레니엄 상 문제(Millennium Prize Problems)의 하나인 나비에–스토크스 문제(Navier–Stokes problem)도 결국 그러한 한계를 찾을 수 있느냐로 귀결된다.

더 도전하기

1 **단진동.** $y(0) = A$, $y'(0) = 0$인 $y'' + y = 0$에 대하여 보존되는 에너지를 구하고 $|y| \le A$임을 이끌어 내라. 정확한 해와 비교하여 확인하라.

2 **진자.** 진자(pendulum)의 각 θ는 (적당한 단위에서) $\theta'' + \sin\theta = 0$을 만족한다. $(\theta')^2 - 2\cos\theta$가 상수임을 보여라. 진자가 $|\theta_0| \le \pi$인 각 θ_0에서 정지 상태로 출발하면 $|\theta|$가 결코 $|\theta_0|$를 넘지 않음을 보여라. $|\theta_0| > \pi$이면 무엇이 잘못되는가?

3 **감쇠.** $k > 0$일 때 $y'' + 2ky' + y = 0$에 대하여 $(y')^2 + y^2$이 감소함을 보여라. 이 값은 반드시 0으로 수렴하는가?

4 **탈출.** $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$인 $y'' - y^3 = 0$에 대하여 보존량(conserved quantity)을 구하고, 그 보존량으로는 y를 유계로 묶을 수 없음을 보여라. 무엇이 잘못되는가?

더 읽을거리

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press). 제 6장과 제 7장에서 위상 평면(phase plane), 보존계(conservative system), 랴푸노프 함수를 다룬다.

- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*** (Oxford University Press). 에너지 방법의 예가 많이 실린 표준 학부 교재이다.
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems*** (Basic Books). 나비에–스토크스 문제에 대한 이해하기 쉬운 설명이 실려 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 8.2절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/bounding-without-solving.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com