8.1 해가 유일하지 않을 때

학습지

문제

STEP III 1994, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 양변에 제곱근을 취하면 $y' = \pm 2\sqrt{y}$이다. $y = (x-c)^2$을 대입해 보자. 이것이 방정식을 만족하는가? 이보다 더 간단한 해가 있는가?

1단계 한 점을 지나는 해

다루는 내용: 점 (a, b^2)을 지나는 두 해

생각해 보기 점 (a, b^2)을 지나는 포물선(parabola) $y = (x-c)^2$은 어느 것인가? c에 대해 풀어라. 두 답이 서로 다른 이유는 무엇인가?

2단계 두 점과 공통인 해

다루는 내용: 점 $(a_1, 1)$과 $(a_2, 1)$

생각해 보기 원점을 지나는 해는 어느 것인가? 그 해는 어디에서 높이 1에 이르는가? 이것으로 a_1과 a_2를 구할 수 있다. 각 점을 지나는 두 해를 나열하고, 어느 해를 공통으로 갖는지 살펴보아라.

3단계 해 전체의 족과 공통접선

다루는 내용: 마지막 문항: 공통접선

잠깐, 직접 해 보기 포물선 $y = (x - c)^2$을 몇 개 그려 보아라. 이 포물선 모두에 접하는 직선은 무엇인가? 그 직선 자체도 이 방정식의 해인가?

4단계 왜 중요한가

다루는 내용: 마지막 문항: 접선이 중요한 이유

> **생각해 보기** x축 위의 한 점을 지나는 해는 어느 것인가? 한동안 x축을 따라가다가 포물선을 따라 x축을 벗어나는 해를 만들 수 있는가? 두 조각이 이어지는 점에서 그 해는 미분가능(differentiable)한가?

숨은 수학

해는 언제 유일한가?

피카르-린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)(1890–1894년 무렵 에밀 피카르(Émile Picard)와 에른스트 린델뢰프(Ernst Lindelöf)가 증명했다)에 따르면, F가 y에 대하여 **립시츠**(Lipschitz)이면, 즉 $|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$를 만족하는 상수 L이 있으면, $y(x_0)=y_0$인 방정식 $y'=F(x,y)$는 x_0 근처에서 해를 정확히 하나 가진다. 대략 말하면, y가 변할 때 F가 무한히 빠르게 변해서는 안 된다는 뜻이다. 우리 방정식은 $y'=\pm 2\sqrt{y}$이고, $\sqrt{y}$는 $y=0$에서 기울기가 무한대이다. 그곳에서 립시츠가 아니며, 바로 그곳에서 유일성이 깨진다. (주세페 페아노(Giuseppe Peano)는 1886년에 F가 연속이기만 하면 해가 **존재**함은 보장되지만 유일함은 보장되지 않는다는 것을 보였다.) 피카르-린델뢰프 정리의 증명에는 Section 2.2의 축약 사상 원리(contraction mapping principle)에 의해 수렴하는 반복법이 쓰인다.

새는 양동이

물리적인 예를 하나 보자. 바닥에 구멍이 난 양동이는 토리첼리(Torricelli)의 법칙에 따라 비워진다. 물의 높이 h는 $h'=-k\sqrt{h}$를 만족한다. 시간을 앞으로 흘려보내면 아무 문제가 없다. 양동이는 비워지고, 빈 채로 남는다. 그러나 시간을 거꾸로 돌려 보자. 빈 양동이를 발견했을 때, 방정식은 그것이 언제 비워졌는지 알려 주지 못한다. 모든 시간에 $h=0$인 해도,

어느 순간까지 가득 차 있다가 빠져나간 해들도 모두 "지금 비어 있음"과 모순되지 않는다. 비유일성은 과거에 관한 정보가 사라졌다는 사실이 수학에 드리운 그림자이다.

노턴의 돔

2003년에 철학자 John Norton은 마찰이 없는 돔을 하나 묘사했다. 그 모양이 특별해서, 꼭대기에 정확히 놓인 공은 $r'' = \sqrt{r}$ 꼴의 뉴턴 법칙을 따른다. 한 가지 해는 공이 꼭대기에 영원히 머무르는 것이다. 그러나 다른 해들도 있다. 공이 아무 시간 동안 그곳에 머물다가 아무 원인 없이 저절로 아무 방향으로나 굴러 내려가는 해들이다. 이 예는 지금도 논쟁거리이다. 고전역학은 결국 결정론적(deterministic)인가? 수학적으로 보면 이것은 바로 이 문제에서 본 것과 같은 종류의 비유일성이다.

더 도전하기

1 **두 가지 증가율.** STEP II 2018, 8번 문제 (step.maths.org/questions/18-s2-q8)을 풀어 보자. 이 문제는 치환을 이용해 두 성장 방정식을 푼다. 그런 다음 왜 $y = 0$도 같은 초깃값을 갖는 해인지, 그리고 이것이 유일성에 관해 무엇을 말해 주는지 생각해 보자.

2 **새는 양동이.** $h(0) = h_0 > 0$일 때 $h' = -k\sqrt{h}$를 풀어라. 양동이는 언제 비는가? 어떤 T에 대하여 $h(T) = 0$이고 모든 $t \geq T$에 대하여 $h(t) = 0$인 서로 다른 두 해를 써라.

3 **되찾은 유일성.** $y(0) = 0$인 $y' = 2y$의 해는 $y = 0$뿐임을 보여라. (**힌트:** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$를 생각해 보아라.) $2\sqrt{y}$에는 없고 $2y$에는 있는 성질은 무엇인가?

4 **세제곱.** 원점을 지나는 $y' = 3y^{2/3}$의 해를 모두 구하여라.

더 읽을거리

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*** (Academic Press). 존재성과 유일성, 그리고 이 장의 나머지 내용 대부분을 다룬다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 역사 이야기가 가득한 고전이다. 특이해와 포락선을 다룬다.
- **John Norton, "The dome: an unexpectedly simple failure of determinism"**, *Philosophy of Science* 75 (2008). 짧고 읽기 쉽다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 8.1절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/non-uniqueness.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com