7.9 정다면체는 다섯 개뿐이다

학습지

문제

STEP III 1999, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 정육면체에서 오일러 공식을 확인해 보자. 꼭짓점, 모서리, 면은 각각 몇 개인가? 사각뿔에서는 어떠한가?

생각해 보기 정다면체에서 각 면은 m개의 모서리를 가지고, 각 모서리는 두 면에 접한다. 이로부터 E와 F 사이에 어떤 등식이 얻어지는가? 마찬가지로 E와 V 사이에는 어떠한가?

1단계 F에 대한 공식

다루는 내용: F에 대한 공식 유도하기

생각해 보기 $mF = 2E$와 $nV = 2E$를 이용하여 E와 V를 F로 나타낸다. 이를 오일러(Euler) 공식에 대입하고 F에 대하여 푼다.

생각해 보기 $4 - (n-2)(m-2)$를 전개하여 앞에서 구한 분모와 비교한다.

2단계 가능한 m과 n의 값은 무엇인가?

다루는 내용: 다섯 가지뿐임을 보이기

생각해 보기 m의 가능한 최솟값은 얼마이고, n의 가능한 최솟값은 얼마인가? $F > 0$이므로 h의 부호는 어떠해야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 두 인수가 모두 1 이상이면서 $(n-2)(m-2) < 4$를 만족해야 한다. 가능한 경우를 모두 나열한다. 각 경우에 대하여 h, F, E, V를 구하고, 그 입체가 무엇인지 말한다.

숨은 수학

오일러 공식과 위상수학

오일러는 1750년에 $V - E + F = 2$를 제시했지만 그의 증명에는 빈틈이 있었고, 이 공식에는 증명 시도와 반례와 수정이 이어진 흥미로운 역사가 있다. 가운데에 사각형 구멍이 뚫린 "액자" 모양 다면체는 $V - E + F = 0$이고, 두 정육면체를 한 꼭짓점에서 붙인 다면체는 $V - E + F = 3$이다. 임레 라카토슈(Imre Lakatos)는 이 역사를 바탕으로 수학적 개념이 반례를 통해 어떻게 다듬어지는지를 다룬 유명한 책 *Proofs and Refutations*(증명과 반

박)를 썼다. 결론은 $V - E + F$가 위상수학의 느슨한 의미에서 곡면의 **모양**에만 의존한다는 것이다. 구로 변형할 수 있는 곡면에서는 2, 원환면(torus, 도넛 모양)에서는 0, 구멍이 g개인 곡면에서는 $2 - 2g$이다. 이 수, 곧 **오일러 지표**(Euler characteristic)는 늘이거나 구부려도 변하지 않는 성질을 연구하는 위상수학(topology)의 초창기 개념 가운데 하나였다.

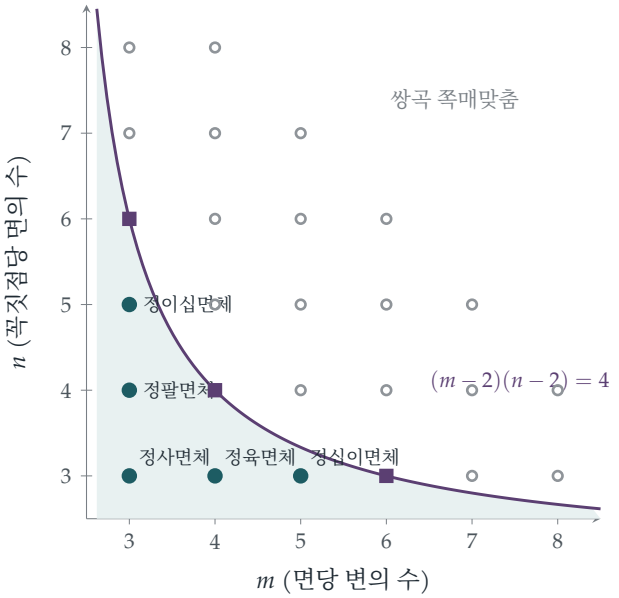

그림 7.9.1 $m, n \geq 3$인 가능한 순서쌍 (m, n). 곡선 $(m-2)(n-2) = 4$ 아래(색칠한 부분)에는 다섯 개의 플라톤 입체(청록색)가 있다. 곡선 위에는 평평한 평면의 세 가지 쪽매맞춤(자주색 사각형)이 있다. 정삼각형$(m = 3, n = 6)$, 정사각형$(4, 4)$, 정육각형$(6, 3)$에 의한 쪽매맞춤이다. 곡선보다 위에 있는 모든 점(속이 빈 원)은 쌍곡평면의 정규 쪽매맞춤을 준다.

구를 넘어서

$h = 0$이거나 $h < 0$이면 어떻게 될까? $(m-2)(n-2) = 4$일 때는 해가 $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 3)$의 세 개이다. 정삼각형 여섯 개, 정사각형 네 개, 또는 정육각형 세 개가 한 점에 모이면 각의 합이 정확히 360°가 된다. 이것이 평평한 평면의 세 가지 정규 쪽매맞춤(tiling)으로, 욕실 바닥이나 벌집에서 볼 수 있는 무늬이다. 그리고 $(m-2)(n-2) > 4$이면 한 꼭짓점에 모인 각의 합이 360°보다 **크다**. 이는 평평한 평면에서는 불가능하지만 Section 5.8의 쌍곡평면(hyperbolic plane)에서는 얼마든지 가능하다. 쌍곡평면의 정규 쪽매맞춤은 무한히 많으며, 그림 7.9.1에서 곡선보다 위에 있는 점마다 하나씩 있다. 에셔(Escher)의 *Circle Limit*(원의 극한) 목판화 연작은 그중 몇 가지를 그린 것이다. 그러므로 플라톤 입체의 분류는 사실

기하학 전체를 관통하는 삼분법(구, 평면, 쌍곡평면)의 첫 번째 경우인 셈이다.

대칭군

플라톤 입체의 대칭은 군(group)을 이룬다. 회전 대칭은 정사면체가 12개, 정육면체와 정팔면체가 24개(이 둘은 쌍대(dual)이다. 즉 면과 꼭짓점을 맞바꾸면, 곧 $m \leftrightarrow n$이면 서로 바뀐다), 정십이면체와 정이십면체가 60개이다. 위수가 60인 정이십면체군은 Section 6.4에서 언급했듯이 5차 방정식을 거듭제곱근(radical)으로 풀 수 없게 만드는 "단순(simple)" 군이다. 펠릭스 클라인(Felix Klein)은 정이십면체를 5차 방정식의 풀이와 연결한 책 *Lectures on the Icosahedron*(정이십면체에 관한 강의, 1884)을 한 권 통째로 썼다.

더 도전하기

1 **쌍대성.** m과 n을 맞바꾸면 V와 F가 맞바뀌고 E는 변하지 않음을 보여라. 어떤 플라톤 입체끼리 서로 쌍대인가? 자기 자신과 쌍대인 것은 어느 것인가?

2 **축구공.** 전통적인 축구공은 정오각형 12개와 정육각형 20개로 이루어지며, 각 꼭짓점에 세 면이 모인다. 이중 계산과 오일러 공식을 이용하여 $V - E + F = 2$임을 확인하라. 더 일반적으로, 오각형과 육각형으로 이루어지고 각 꼭짓점에 세 면이 모이는 다면체는 언제나 오각형을 정확히 12개 가짐을 보여라.

3 **원환면.** "액자" 모양 다면체(사각형 구멍이 뚫린 사각 블록)를 만들어 V, E, F를 세어라. $V - E + F = 0$임을 확인하라.

4 **꼭짓점에 모인 각.** 정m각형의 한 내각은 $180^\circ(1 - \frac{2}{m})$이다. 이러한 각 n개가 볼록 입체의 한 꼭짓점 둘레에 들어맞을(합이 360°보다 작을) 필요충분조건이 $(m-2)(n-2) < 4$임을 보여, 분류에 대한 두 번째 증명을 제시하라.

더 읽을거리

- **David Richeson, *Euler's Gem*** (Princeton University Press). $V - E + F = 2$의 역사와 그것이 어떻게 위상수학으로 이어졌는지를 다룬다. 식스폼(sixth form, 영국의 대학 진학 준비 과정) 학생에게 매우 좋은 책이다.
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*** (Cambridge University Press). 오일러 공식과 증명의 본성에 관한 대화편이다.
- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*** (Dover). 정다면체와 그 고차원 친척들을 다룬 고전이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 7.9절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/platonic-solids.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com