7.7 결코 변하지 않는 양

학습지

문제

STEP III 2024, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** 식 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{N}$의 **교환자**(*commutator*)라 한다. 이것은 언제 0이 되는가? 소문항 (i)을 이용하면 그 대각합은 얼마인가?

1단계 대각합

다루는 내용: 소문항 (i)

> **생각해 보기** $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$로 놓고, $\mathbf{MN}$과 $\mathbf{NM}$의 대각 성분(diagonal entries)만 계산한다.

2단계 행렬식의 도함수

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 곱의 미분법(product rule)으로 $ad - bc$를 미분한다. 그다음 2×2 행렬의 역행렬(inverse) 공식을 이용하여 $\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$의 대각 성분을 계산한다.

3단계 세 보존량

다루는 내용: 소문항 (iii), 세 상수

생각해 보기 대각합(trace)에 대해서는 미분방정식(differential equation)의 양변에 대각합을 취하고 소문항 (i)을 이용한다.

잠깐, 직접 해 보기 행렬식(determinant)에 대해서는 방정식의 양변 왼쪽에 $\mathbf{M}^{-1}$을 곱하고 소문항 (ii)를 이용한다. 이때 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$이 필요한데, 이것은 왜 성립하는가? $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$은 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$과 $\det\mathbf{M}$으로 나타낸다.

4단계 명시적인 해

다루는 내용: 소문항 (iii), $\mathbf{M}$ 구하기

생각해 보기 $\mathbf{N}$을 $t\mathbf{I}$와 $t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$의 합으로 나눈다. $t\mathbf{I}$ 부분은 $\mathbf{M}$과 교환(commute)하므로 $\mathbf{MN}-\mathbf{NM}$에서 사라진다.

잠깐, 직접 해 보기 a, b, c, d에 대한 네 미분방정식을 쓴다. 먼저 c를 구하고, 다음으로 a와 d를, 마지막으로 b를 구한다. 구한 대각합과 행렬식이 상수인지 확인한다.

5단계 다른 방정식

다루는 내용: 소문항 (iv)

잠깐, 직접 해 보기 $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{N}$이면 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\frac{d\mathbf{M}}{dt}$이고, 소문항 (ii)는 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$과 $\det\mathbf{M}$이 변하는 방식을 연결한다. $\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$처럼 대각합은 고정된 채 행렬식이 변하는 $\mathbf{M}$을 찾아본다.

숨은 수학

솔리톤과 랙스 쌍

1834년 스코틀랜드의 공학자 John Scott Russell은 에든버러 근처의 유니언 운하(Union Canal)를 따라 나아가는 고립파 하나를 말을 타고 1마일 넘게 쫓아갔는데, 그 파동은 모양을 잃지 않았다. 이러한 파동은 **코르테베흐-드프리스**(*Korteweg–de Vries, KdV*) **방정식**으로 기술되며, 1960년대에 Norman Zabusky와 Martin Kruskal의 컴퓨터 실험은 이러한 "솔리톤" 두 개가 마치 입자처럼 충돌한 뒤에도 변하지 않은 채로 빠져나올 수 있음을 보여 주었다. 이를 설명하려면 무한히 많은 보존량이 필요했다. 피터 랙스는 1968년에 KdV 방정식을 한 쌍의 미분 연산자(differential operators) L과 P에 대하여 $\dot{L} = LP - PL$로 쓸 수 있음을 보였다. 그러면 이 문제에서와 똑같이 L의 고유값이 보존되고, 이 고유값들이 무한히 많은 보존 법칙을 준다. 랙스 쌍을 갖는 계를 **적분가능계**(*integrable*)라 하며, 이들은 정확히 풀 수 있는 몇 안 되는 비선형(nonlinear) 계에 속한다.

등스펙트럼 흐름

$\mathbf{M}$의 대각합과 행렬식이 그 특성다항식(characteristic polynomial) $\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$을 결정하므로, $\mathbf{M}$의 고유값은 시간에 따라 변하지 않는다. 흐름 $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$은 $\mathbf{M}$을 고유값이 고정된 행렬들의 집합 안에서 움직인다. 실제로 해는 언제나 어떤 가

역(invertible) 행렬 $\mathbf{S}(t)$에 대하여 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$의 꼴이다. 즉 행렬은 처음 값과 계속 닮음(similar)이다. 같은 아이디어가 물리학 전반에 흐른다. 양자역학에서 관측가능량 $\mathbf{A}$는 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$에 따라 변하는데, 여기서 $\mathbf{H}$는 에너지이므로 에너지와 교환 가능한 것은 무엇이든 보존된다.

야코비 공식

소문항 (ii)는 임의의 크기의 가역행렬에 대하여 성립하며, 이를 **야코비**(*Jacobi*) **공식**(*Jacobi's formula*)이라 한다. $\det\mathbf{M}$이 음수일 수도 있으므로 로그 없이 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}\,\mathrm{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\big)$로 쓰는 것이 가장 안전하다. 로그 꼴 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \mathrm{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\big)$은 $\det\mathbf{M} > 0$이어야 한다(일반적으로는 $\ln|\det\mathbf{M}|$을 쓴다). 그 결과 하나로, 상수 행렬 $\mathbf{A}$에 대하여 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$이면 $\det\mathbf{M}(t) = e^{t\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A}}\det\mathbf{M}(0)$이다. 미분방정식 연구에서 이것은 위상 공간(phase space)의 부피가 어떻게 늘어나거나 줄어드는지 알려 준다. 고전역학의 방정식에서는 대각합이 0이어서 부피가 보존되는데, 이 결과를 **리우빌**(*Liouville*) **정리**(*Liouville's theorem*)라 한다.

더 도전하기

1 **해를 확인하기.** 단계 4의 행렬 $\mathbf{M}(t)$가 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$을 만족함을 미분하여 확인하여라.

2 **닮음.** $\mathbf{M}_0$이 상수이고 $\mathbf{S}(t)$가 $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$을 만족할 때 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$이면 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$임을 보여라. (**힌트:** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$.)

3 **부피의 증가.** $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$라 하자. $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N}$을 만족하는 $\mathbf{N}$을 구하고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \mathrm{tr}\,\mathbf{N}$임을 확인하여라.

4 **더 높은 거듭제곱.** $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$일 때, 모든 양의 정수 k에 대하여 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$임을 직접 보여라.

더 읽을거리

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*** (Cambridge University Press). 랙스 쌍을 포함하여 솔리톤을 다루는 대표적인 학부 입문서이다.
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons*** (Cambridge University Press). Scott Russell이 본 파동의 이야기가 실려 있다.
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem*** (Johns Hopkins Univer-

sity Press). 대칭성이 어떻게 보존 법칙을 낳는지 설명한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 7.7절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/lax-pairs.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com