7.6 쌍곡 회전과 상대성 이론

학습지

문제

STEP III 1991, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s3-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$에 대응하여 $\cosh u$와 $\sinh u$가 만족하는 항등식(identity)은 무엇인가? 또 $\cosh(u+v)$와 $\sinh(u+v)$의 덧셈정리(addition formula)는 무엇인가?

1단계 쌍곡선은 불변이다

다루는 내용: 쌍곡선, 그리고 자기 자신으로 옮겨지는 원점을 지나는 직선

생각해 보기 $x'^2 - y'^2$을 전개해 보아라. 교차항(cross terms)은 소거된다. 어떤 항등식을 쓰면 마무리되는가?

잠깐, 직접 해 보기 원점을 지나는 직선은 그 방향이 고유벡터(eigenvector)일 때 자기 자신으로 옮겨진다. 방향 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$과 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$을 시험해 보아라.

2단계 쌍곡각의 덧셈

다루는 내용: 기울기, $v' = v + u$

생각해 보기 기울기(gradient)가 $\tanh v$인 직선의 방향은 $(\cosh v, \sinh v)$이다. 이 방향에 T를 적용하고 덧셈 정리(addition formulas)를 이용하라. 직선이 원점을 지나는지 여부가 왜 상관없는가?

3단계 각은 언제 보존되는가?

다루는 내용: 각이 같을 조건

생각해 보기 $m_i = \tanh v_i$로 두고 $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$를 이용한 다음, 분자와 분모에 $\cosh v_1 \cosh v_2$를 곱하라.

잠깐, 직접 해 보기 분자에는 $\sinh(v_1 - v_2)$가, 분모에는 $\cosh(v_1 + v_2)$가 나와야 한다. 이 중 T에 의해 바뀌는 것은 어느 쪽인가? $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$는 언제 성립하는가?

4단계 그림

다루는 내용: 원점에서 만나는 직선

> **생각해 보기** $v_1 + v_2 = -u$일 때 v_1'과 v_2'의 값은 무엇인가? 새 직선들을 원래 직선들을 x축에 대해 대칭(reflection)시킨 직선들과 비교해 보아라.

숨은 수학

특수상대성이론

아인슈타인의 특수상대성이론(1905)에서, 서로에 대해 일정한 속도로 움직이는 관찰자들은 시간과 거리에 대해서는 서로 다른 값을 얻지만, 양 $t^2 - x^2$(빛의 속력 $c = 1$)에 대해서는 모두 같은 값을 얻는다. 이 양을 **시공간 간격**(*spacetime interval*)이라 한다. 이것을 보존하는 변환이 **로렌츠 변환**(*Lorentz transformation*)이며, 공간이 1차원일 때 이 변환은 x를 시간, y를 거리로 볼 때 정확히 이 문제의 행렬들이다. 속도 $v = \tanh u$로 움직이는 관찰자는 우리 좌표와 이 행렬로 연결되는 좌표를 사용하며, 이때 $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$은 시간 지연(time dilation)의 유명한 인자 γ이다. 1908년 민코프스키(Hermann Minkowski)는 이로써 시공간이 부호에 음수가 섞인 "거리"를 갖는 4차원 기하가 된다는 것을 간파했다. "이제부터 공간 그 자체와 시간 그 자체는 단순한 그림자로 사라질 운명이다."

문제의 물리적 의미

- **불변 직선** $y = \pm x$는 광선의 경로이다. 이 직선들은 모든 관찰자에게 같다. 빛의 속력이 누구에게나 같다는 것, 이것이 상대성이론의 기본 원리이다.
- **쌍곡선** $x^2 - y^2 = 1$은 가능한 모든 일정한 속도로 움직이는 관찰자들이 측정했을 때 원점으로부터 "고유시간(proper time)" 한 단위만큼 떨어진 사건들의 집합이다.
- **신속도의 덧셈.** 원점을 지나고 기울기가 $\tanh v$인 직선은 속도 $\tanh v$로 움직이는 물체의 경로이다. 신속도 u만큼 부스트하면 그 속도는 $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1 + \tanh v \tanh u}$로 바뀌는데,

이것이 바로 Section 3.8에서 본 아인슈타인의 속도 덧셈 공식이다. 속도는 더해지지 않지만, 신속도는 더해진다.

그리고 Section 5.8에서 우리는 같은 덧셈 공식을 푸앵카레 원판(Poincaré disc)의 거리 규칙으로 만났다. 상대성이론에서 가능한 속도들의 집합은 신속도로 측정하면 쌍곡공간(hyperbolic space)이 된다.

더 도전하기

1 **부스트의 합성.** $T(u)$가 문제의 행렬일 때 $T(u)T(w) = T(u+w)$임을 보여라. $T(u)^{-1}$은 무엇인가?

2 **시간 지연.** 우주선이 빛의 속력의 0.8배로 날아간다. 신속도 u와 $\cosh u$를 구하라. 지구에서 10년이 흐르면 우주선에서는 시간이 얼마나 흐르는가? ($t_{\text{우주선}} = t_{\text{지구}} / \cosh u$를 이용하라.)

3 **쌍곡 넓이.** 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$, x축, 그리고 원점에서 $(\cosh v, \sinh v)$까지의 선분으로 둘러싸인 넓이가 $\frac{v}{2}$임을 보여라. 이는 원에서 대응하는 넓이가 $\frac{\theta}{2}$인 것과 같다. T가 이러한 넓이를 보존해야 하는 이유는 무엇인가?

4 **압착.** 좌표를 $p = x + y$, $q = x - y$로 바꾸어라. T가 $p \mapsto e^{u}p$, $q \mapsto e^{-u}q$가 되고, 쌍곡선이 $pq = 1$이 됨을 보여라. 이 좌표에서 변환을 기하적으로 설명하라.

더 읽을거리

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman). 신속도와 시공간 도표로 설명하는 특수상대성이론으로, A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 수학을 갖춘 학생을 대상으로 한다.
- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity*** (CRC Press). 상대성이론을 쌍곡 삼각법으로 다루며, 이 절의 정신과 꼭 맞는다.
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory*** (여러 판). 아인슈타인 자신이 쓴 대중 해설서로, 지금도 매우 읽기 쉽다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 7.6절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/hyperbolic-rotations.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com