7.5 3차원에서의 회전

학습지

문제

STEP III 2022, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** $\mathbf{r}$이 $\mathbf{n}$에 수직일 때 $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 기하적으로 어떤 모습인가? 또 $\mathbf{r}$이 $\mathbf{n}$에 평행할 때는 어떤가?

1단계 두 번 외적하기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\mathbf{n} = (a, b, c)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$로 놓는다. $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$을 계산한 다음 다시 $\mathbf{n}$과 외적(cross product)을 하고, x성분을 살펴본다.

잠깐, 직접 해 보기 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$을 이용하여 $b^2 + c^2$을 바꾸어 쓴다. 남은 식에서 내적 $\mathbf{n}.\mathbf{r}$이 보이는가?

2단계 회전

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $g(\mathbf{n})$은 무엇인가? $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$임을 기억한다.

잠깐, 직접 해 보기 이제 $\mathbf{n}$에 수직인 $\mathbf{r}$을 생각한다. 소문항 (i)에 따르면 $f(f(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$이다. $g(\mathbf{r})$을 간단히 한다. $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$은 $\mathbf{r}$과 비교하여 어떤 모양인가?

3단계 반사

다루는 내용: 소문항 (iii)

> **잠깐, 직접 해 보기** 소문항 (i)을 이용하여 h를 간단히 한다. h는 $\mathbf{n}$을 어디로 보내고, $\mathbf{n}$에 수직인 벡터들은 어디로 보내는가?

숨은 수학

오일러의 회전 정리

원점을 고정하는 3차원 공간의 모든 회전은 원점을 지나는 어떤 축을 중심으로 한 회전이다. 오일러(Euler)는 1775년에 이를 증명하였다. 행렬의 언어로 말하면, 모든 3×3 회전행렬은 고윳값(eigenvalue)이 1인 고유벡터(eigenvector)를 가지며, 그것이 바로 축이다. 로드리게스 공식은 그 역(converse)을 준다. 모든 축 $\mathbf{n}$과 각 θ에 대해 회전행렬은

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

이다. 여기서 $\mathbf{K}$는 $\mathbf{r}\mapsto \mathbf{n}\times\mathbf{r}$의 행렬이다. $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$이므로 지수 급수(exponential series) $e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$는 정확히 이 공식으로 정리되며, 이것은 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$의 3차원 버전이다. 회전과 "무한소 회전" $\mathbf{K}$의 지수 사이의 이러한 연결은 **리 군**(*Lie groups*) 이론의 출발점이다.

회전은 교환법칙을 만족하지 않는다

책을 평평하게 들고, 수직축을 중심으로 90° 돌린 다음 수평축을 중심으로 90° 돌려 보자. 그다음 처음부터 다시 시작하여 두 회전을 반대 순서로 해 보자. 책은 서로 다른 위치에 놓이게 된다. 2차원과 달리 3차원에서는 회전의 합성에 대해 교환법칙이 성립하지 않는다. 이

것이 Section 6.7의 사원수(quaternion)가 유용한 이유 중 하나이다. $\mathbf{n}$을 축으로 하는 θ만큼의 회전은 사원수 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$에 대응하고, 회전의 합성은 사원수의 곱셈이 되며, 비가환성도 그 안에 자연스럽게 담겨 있다. 로드리게스 자신도 1840년 논문에서, 해밀턴(Hamilton)이 사원수를 발명하기 3년 전에 이미 회전의 합성 공식을 찾아냈다.

더 도전하기

1 **평면에서의 회전.** STEP III 2017, 2번 문제 (step.maths.org/questions/17-s3-q2)를 풀어 보라. 이 문제는 복소수를 이용하여, 평면의 두 회전을 합성하면 한 가지 예외를 제외하고 회전이 됨을 보인다. 그 예외를 찾고, 그때 합성이 무엇이 되는지 구하라.

2 **특정한 회전.** $(1, 1, 1)$ 방향의 축을 중심으로 $120°$만큼 회전하는 변환의 행렬을 구하라. 이 변환이 좌표축들을 순환적으로 치환함을 보여라.

3 **$\mathbf{K}$의 거듭제곱.** $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$이고 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$임을 보이고, 지수 급수로부터 로드리게스 공식을 유도하라.

4 **두 반사가 회전을 만든다.** 서로 각 α를 이루며 원점을 지나는 두 평면에 대해 차례로 반사하는 것은, 두 평면의 교선을 축으로 하는 2α만큼의 회전임을 보여라.

더 읽을거리

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*** (Dover). 3차원 회전에 관한 결정판 저서로, 로드리게스의 기여도 다룬다.
- **Simon Altmann, "Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal"**, *Mathematics Magazine* 62 (1989). 짧고 생생한 역사 이야기이다.
- **John Stillwell, *Naive Lie Theory*** (Springer). 학부생을 위한 회전, 사원수, 리 군 입문서이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 7.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/rotations-3d.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com