7.4 제자리로 돌아오는 행렬

학습지

문제

STEP II 2020, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 모든 2×2 행렬은 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$을 만족한다(케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem). 직접 곱해서 확인해 보라). 이것이 $\mathbf{M}^2$에 관한 질문에 어떻게 도움이 될 수 있을까?

1단계 제곱의 대각합

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $\mathbf{M}^2$을 전개하고 대각 성분(diagonal entries)을 더한다. 이것을 $(a+d)^2$과 비교한다.

2단계 $\pm\mathbf{I}$의 제곱근

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $t = a + d$, $d = \det\mathbf{M}$일 때 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$에 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$를 대입한다. $t \neq 0$이면 $\mathbf{M}$은 어떤 꼴의 행렬이어야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 $t \neq 0$이면 $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$일 수밖에 없는데, 이는 제외된 경우임을 보인다. 따라서 $t = 0$이다. 이때 $\det\mathbf{M}$은 얼마인가? $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$에 대해서도 같은 방법으로 하고, 역(converse)도 증명해야 한다는 것을 잊지 않는다.

3단계 네제곱근

다루는 내용: 소문항 (iii)

잠깐, 직접 해 보기 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$이라 두면 $\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$는 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$라는 뜻이 된다. $\mathbf{N}$에 소문항 (ii)를 적용한다. $\det \mathbf{N}$이 -1일 수 없는 이유는 무엇인가?

생각해 보기 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$에 대해서는 $\mathbf{N}$에 소문항 (ii)의 뒷부분을 적용하고, 소문항 (i)을 이용하여 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$과 $\det\mathbf{N}$을 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$과 $\det\mathbf{M}$으로 나타낸다.

4단계 회전이 아닌 $\mathbf{I}$의 여덟제곱근

다루는 내용: 소문항 (iv)

생각해 보기 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$인 행렬은 모두 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$를 만족한다. 대각합(trace)과 행렬식(determinant)이 알맞으면서 성분이 회전(rotation) 행렬의 성분이 아닌 행렬을 하나 찾는다. 그 행렬이 회전도 반사(reflection)도 아님을 어떻게 확인할 수 있는가?

숨은 수학

닮은 행렬

4단계의 $\mathbf{M}$은 왜 "변장한 회전"일까? 어떤 가역행렬 $\mathbf{S}$에 대하여 $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$이면 두 행렬 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{R}$은 **닮았다**(*similar*)고 한다. 이들은 서로 다른 좌표에서 같은 변환을 나타낸다. 닮은 행렬은 대각합과 행렬식이 같으며, ($\mathbf{I}$의 상수배가 아닌 2×2 행렬에 대해서는) 그 역도 성립한다. 따라서 대각합이 $\sqrt{2}$이고 행렬식이 1인 실행렬은 모두 45° 회전과 닮았고, $\mathbf{S}$가 주는 비스듬한 좌표에서는 그저 회전할 뿐이다(그림 7.4.1 (온라인 전체 절에 수록)). 일반적으로 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$인 실수 2×2 행렬은 언제나 회전이나 반사와 닮았다.

결정에 5회 대칭이 없는 이유

결정은 원자가 규칙적으로 반복되어 배열된 것이다. 결정의 회전 대칭은 원자의 격자(lattice)를 자기 자신으로 보내므로, 격자를 기준으로 한 좌표에서는 **정수** 성분을 가지는 행렬로 주어진다. 따라서 그 대각합은 정수이다. 그런데 각 θ만큼의 회전은 어떤 좌표에서든 대각합이 $2\cos\theta$이고, $2\cos\theta$가 정수인 것은 그 값이 $-2, -1, 0, 1$ 또는 2일 때뿐이다. 곧 위수(order)가 2, 3, 4, 6인(그리고 1인) 회전뿐이다. 5회 대칭이 되려면 $2\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$이어야 하는데, 이는 정수가 아니다. 이것이 **결정학적 제한 정리**(*crystallographic restriction theorem*)이다. 1982년 단 셰흐트만(Dan Shechtman)은 겉보기에 5회 대칭을 가진 합금을

관찰했고 처음에는 조롱을 받았다. 그것은 펜로즈(Penrose) 타일링처럼 질서는 있지만 주기적이지 않은 **준결정**(*quasicrystal*)으로 밝혀졌고, 따라서 이 정리의 적용 대상이 아니었다. 그는 2011년에 노벨 화학상을 받았다.

더 도전하기

1 **위수가 3인 회전.** STEP II 2021, 7번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 시험지 묶음, www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip)에 도전해 보라. 이 문제는 특이한 성질을 가진 회전행렬에서 출발하여, 세제곱이 단위행렬인 모든 실수 2×2 행렬에 관한 사실로 끝난다.

2 **위수가 6인 경우.** $\mathbf{M}^6 = \mathbf{I}$이지만 $\mathbf{M}^2 \neq \mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}^3 \neq \mathbf{I}$이기 위한 대각합과 행렬식의 조건을 구하라.

3 **결정학적 제한.** $\mathbf{M}$의 성분이 정수이고 $\det \mathbf{M} = 1$이며 어떤 n에 대하여 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$이면 $\operatorname{tr} \mathbf{M} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$임을 보여라. 위수가 6인 정수 행렬을 하나 구하라.

4 **거듭제곱에 대한 케일리–해밀턴 정리.** $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$를 이용하여 $\mathbf{M}^3$과 $\mathbf{M}^4$를 $p\mathbf{M} + q\mathbf{I}$ 꼴로 나타내고, 이를 이용하여 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$가 되는 조건을 다시 유도하라.

더 읽을거리

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer). 『군과 대칭』. 결정학적 제한과 벽지 무늬의 분류를 다룬다.
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry*** (Cambridge University Press). 『준결정과 기하학』. 준결정과 비주기적 질서의 수학을 다룬다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 『선형대수학 입문』. 닮은 행렬과 케일리–해밀턴 정리를 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 7.4절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/finite-order.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com