7.3 행렬식을 행렬식이게 하는 것

학습지

문제

STEP II 2019, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 문제에 나오는 각각의 특수한 행렬은 무슨 일을 하는가? 일반적인 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대해 $\mathbf{JM}$, $\mathbf{MJ}$, $\mathbf{KM}$, $\mathbf{PM}$을 계산해 보라.

1단계 항등행렬(identity matrix)

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** $\mathbf{M} = \mathbf{MI}$로 쓰고 양변에 f를 적용한다. 적당한 $\mathbf{M}$에 대해서는 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$로 나누어도 된다.

2단계 행 바꾸기(swapping)

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $\mathbf{J}^2$을 계산한다. 이로부터 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2$에 대해 무엇을 알 수 있는가? 가능한 두 값 중 어느 것이 배제되는가?

잠깐, 직접 해 보기 주어진 두 행렬(matrix)을 각각 $\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{J}$를 적당한 순서로 곱한 꼴로 나타낸다. 그런 다음 f를 적용한다.

3단계 종속인 행(dependent rows)

다루는 내용: 소문항 (iii)

잠깐, 직접 해 보기 먼저 두 행이 같은 행렬 $\mathbf{B}$를 생각한다. $\mathbf{JB}$는 무엇인가? f를 적용하고 소문항 (ii)를 이용한다. 그런 다음 $\mathbf{B}$에 $\mathbf{K}$를 곱하여 둘째 행이 첫째 행의 k배인 행렬을 얻는다.

4단계 **층밀림(shear)**

다루는 내용: 소문항 (iv)

생각해 보기 $\mathbf{P}^2$과 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$를 계산한다. 어떤 k에 대해 두 행렬이 같은가?

잠깐, 직접 해 보기 그 등식의 양변에 f를 적용한다. 그러면 해가 두 개인 $\mathrm{f}(\mathbf{P})$에 대한 방정식을 얻는다. $\mathrm{f}(\mathbf{P})$가 0일 수 없는 이유는 무엇인가? $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$를 이용한다.

숨은 수학

모든 곱셈적 함수는 행렬식의 함수이다

문제는 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$에서 멈추지만, 논증을 끝까지 완성할 수 있다. 모든 가역 행렬은 기본행렬(elementary matrices)(행 바꾸기, 행의 상수배, 층밀림)의 곱이고, 이 문제는 각각에서 f가 어떻게 행동하는지 보여 준다. 이로부터 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$를 만족하는 어떤 실수 한 변수 함수 ϕ에 대해 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$임이 따라 나온다. 행렬식 자체는 $\phi(x) = x$인 경우이지만, $\phi(x) = x^3$이나 $\phi(x) = |x|^{1/2}\,\mathrm{sign}(x)$도 조건을 만족한다. 다시 말해, 행렬식은 행렬 위에서 정의되는 본질적으로 새로운 유일한 곱셈적(*multiplicative*) 함

수이다. 군론(group theory)의 언어로 말하면, 행렬식은 가역 행렬들의 군에 대해 가환군(commutative group)이 볼 수 있는 모든 것을 담고 있다.

넓이로서의 행렬식

기하적으로 보면, 2×2 행렬은 단위정사각형을 평행사변형으로 보내며, $\det \mathbf{M}$은 그 평행사변형의 **부호 있는 넓이**(signed area)이다. 방향(orientation)이 보존되면 양수, 뒤집히면 음수이다(그림 7.3.1). 그러면 곱셈적 성질의 의미가 분명해진다. 두 변환을 차례로 하면 넓이의 확대 비율이 곱해진다. 행 바꾸기는 방향을 뒤집으므로 $\det \mathbf{J} = -1$이고, 층밀림은 정사각형을 밀어서 넓이가 같은 평행사변형으로 만들므로 $\det \mathbf{P} = 1$이며, 행이 종속인 행렬은 정사각형을 납작하게 짓눌러 버리므로 행렬식이 영이다. 문제의 모든 단계에는 그에 맞는 그림이 있다.

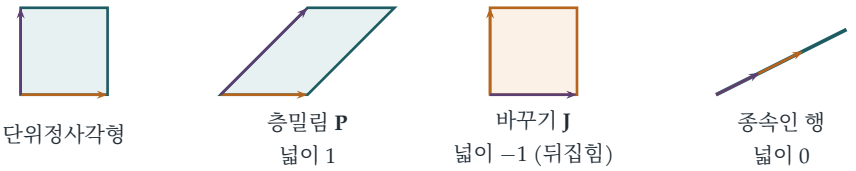

그림 7.3.1 부호 있는 넓이로서의 행렬식. 두 기저 벡터(basis vectors)의 상(호박색, 자주색)이 평행사변형을 만든다. 층밀림은 넓이를 보존하고, 기저 벡터를 맞바꾸면 방향이 뒤집히며, 행(또는 열)이 종속이면 정사각형이 직선 위로 무너진다. 두 변환을 차례로 하면 부호 있는 넓이가 곱해지는데, 이것이 바로 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$이라는 성질이다.

고차원의 행렬식

$n \times n$ 행렬에서 행렬식은 부호 있는 부피의 확대 비율이며, 세 가지 성질로 특징지어진다. 각 행에 대해 선형이고, 두 행을 바꾸면 부호가 바뀌며, 항등행렬에서 값이 1이다. 이 성질들만으로 익숙한 전개 공식들을 유도할 수 있고, 가우스 소거법은 행렬식을 효율적으로 계산하는 방법을 준다. 행렬식은 중적분의 변수변환 공식(**야코비안**(Jacobian))에, 역행렬 공식에, 그리고 Section 5.4에서 보았듯이 다항식의 판별식(discriminant)에 나타난다.

더 도전하기

1 **다른 예.** $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$은 문제의 모든 조건을 만족하고, $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$은 곱셈적 성질은 만족하지만 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$은 만족하지 않음을 보여라.

2 **열연산.** 둘째 열이 첫째 열의 상수배인 행렬에서도 f의 값이 영임을 보여라.

3 **상수배.** $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$라 하자. $\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$이고 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$임을 보여라.

4 **행렬식으로의 환원.** 심화 모든 가역 2×2 행렬은 $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}_k$, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 꼴의 행렬들의 곱으로 나타낼 수 있음을 보여라. 이로부터 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$이 $\det \mathbf{M}$에만 의존함을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*** (Springer; 온라인 무료 공개). 이 문제와 같은 정신으로, 행렬식을 그 성질로부터 정의한다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 5장에서 세 가지 규칙으로부터 행렬식을 전개한다.
- **3Blue1Brown, "The determinant"** (영상, 온라인 무료 공개). 넓이로서의 해석을 아름다운 애니메이션으로 보여 준다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 7.3절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/determinant-axioms.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com