7.2 돌지 않고 늘어나기

학습지

문제

STEP III 1990, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 T가 벡터를 "방향은 그대로 두고 스칼라배만 한다"는 것은 무슨 뜻인가? 이를 식으로 써 보아라.

1단계 고유벡터

다루는 내용: 방향이 바뀌지 않는 두 벡터

생각해 보기 행렬을 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$에 각각 적용해 본다. 각 결과는 처음 벡터의 상수배인가? 몇 배인가?

2단계 원의 상

다루는 내용: E의 방정식과 넓이

생각해 보기 역행렬을 구하여 x와 y를 X와 Y로 나타낸다. 이를 $x^2 + y^2 = 1$에 대입하고 정리한다.

잠깐, 직접 해 보기 넓이에 대해서: 선형사상(linear map)은 모든 넓이를 그 행렬식(determinant)의 절댓값만큼 곱한다. C의 내부 넓이는 얼마인가? 첫 번째 단계에서 구한 두 늘림 배율(stretch factor)을 이용하여 답을 검산할 수 있다.

3단계 X의 최댓값

다루는 내용: E 위에서 X의 최댓값

생각해 보기 X를 C 위의 점 (x, y)로 나타낸다. $x^2 + y^2 = 1$일 때 $9x - 2y$는 얼마나 커질 수 있는가? 이를 단위벡터(unit vector)와의 내적(dot product)으로 생각해 본다.

4단계 접선

다루는 내용: E의 접선

> **잠깐, 직접 해 보기** $\frac{1}{5}(3,4)$에서 C의 접선(tangent)은 $3x+4y=5$이다. 선형사상은 접선을 접선으로 보내므로, X와 Y로 나타낸 x와 y의 식을 이 직선의 방정식에 대입한다.

숨은 수학

스펙트럼 정리

모든 실대칭행렬은 서로 수직인 고유벡터를 빠짐없이 갖추고 있으며, 고윳값은 모두 실수이다. 이것이 **스펙트럼 정리**(spectral theorem)로, 처음 배우는 선형대수(linear algebra) 과목의 핵심 결과 가운데 하나이다. 이 정리에 따르면 모든 대칭 선형사상은 적절한 직교좌표에서 각 축 방향으로 늘이는 것일 뿐이다. 같은 이야기로, $8X^2+12XY+17Y^2$ 같은 모든 이차형식(quadratic form)은 회전을 통해 $\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2$ 꼴로 바꿀 수 있으며, 그래서 모든 유심 원뿔곡선(central conic)은 서로 수직인 축을 가진 타원이나 쌍곡선(hyperbola)이다(**주축 정리**(principal axis theorem)). 이 아이디어는 1820년대의 코시(Cauchy)까지 거슬러 올라가는데, 그는 이를 이용해 이차곡면의 주축과 고체 내부 응력의 주축을 구했다.

이것이 성립하게 하는 것은 대칭성이다. 대칭이 아닌 행렬은 이렇게 고분고분하지 않을 수 있다. 90° 회전은 모든 방향을 돌리므로 실수 고유벡터가 전혀 없고, 전단(shear) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$은 고유벡터 방향이 하나뿐이므로 어떤 두 축을 택해도 그 방향으로 늘이는 변환이 되지 않는다.

어디에나 있는 고유벡터

고유벡터가 등장하는 곳 몇 군데를 소개한다.

- **진동.** 질점과 용수철로 이루어진 계는 **정규 모드**(normal mode)로 진동한다. 정규 모드란 모든 부분이 하나의 진동수로 발맞추어 움직이는 패턴이다. 이것은 어떤 행렬의 고유벡터이고, 진동수는 고윳값에서 나온다(Section 11.2).
- **데이터.** 데이터 점들의 구름이 가장 넓게 퍼져 있는 방향은 그 공분산 행렬(covariance matrix)의 고유벡터이다. 이를 찾는 것이 **주성분 분석**(principal component analysis)으로, 통계학과 기계 학습의 기본 도구 가운데 하나이다(Section 13.7).
- **양자역학.** 어떤 물리량을 측정했을 때 나올 수 있는 결과는 어떤 행렬(또는 연산자(operator))의 고윳값이며, 원자의 에너지 준위도 고윳값이다.
- **웹 검색.** 구글 검색 엔진의 바탕이 된 최초의 아이디어인 PageRank는 페이지 사이의 링크를 나타내는 거대한 행렬에서 고윳값이 1인 고유벡터의 성분에 따라 페이지의 순위를 매긴다.

더 도전하기

1 **고윳값 구하기.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 고윳값이 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$의 근임을 보이고, 문제의 행렬에서 $\lambda = 2$와 4가 나옴을 확인하여라.

2 **수직인 고유벡터.** $\mathbf{M}$이 대칭행렬이고 $\lambda \neq \mu$에 대하여 $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$이면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$임을 보여라. (**힌트**: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu}$를 두 가지 방법으로 계산하여라.)

3 **회전.** 회전행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$은 θ가 π의 배수가 아니면 실수 고유벡터를 갖지 않음을 보여라. 이 행렬의 복소수 고윳값은 무엇인가?

4 **거듭제곱.** 고유벡터를 이용하여 $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$을 구하여라. (**힌트**: $(1,0)$을 $(1,2)$와 $(2,-1)$의 일차결합으로 나타내어라.)

더 읽을거리

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 선형대수 입문서. 6장은 고윳값과 그 응용에 대한 훌륭한 입문이다.
- **Kurt Bryan & Tanya Leise, "The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google"**, *SIAM Review* 48 (2006). 구글 뒤에 숨은 선형대수를 다룬 논문으로, 읽기 쉽고 무료로 볼 수 있다.

- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra*** (동영상 시리즈, 온라인 무료). 이 절에서 다룬 기하학적 아이디어를 정확히 보여 주는 아름다운 애니메이션이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 7.2절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/eigenvectors.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com