7.1 행렬에서는 성립하지 않는 법칙

학습지

문제

STEP II 1993, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** 실수에서 $ab = 0$이면 $a = 0$ 또는 $b = 0$인 이유는 무엇인가? 그 논증은 수의 어떤 성질을 사용하며, 그 성질은 행렬에서도 성립하는가?

1단계 $\mathbf{AB} = 0$이지만 $\mathbf{BA} \neq 0$일 수 있을까?

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 0이 많은 2×2 행렬(matrix)을 사용한다. x성분은 그대로 두고 y성분은 없애는 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$을 시도해 본다.

잠깐, 직접 해 보기 모든 벡터(vector)를 y축 위로 보내는 영행렬이 아닌 $\mathbf{B}$를 찾아, 그다음 $\mathbf{A}$가 그것을 없애도록 한다. 이제 $\mathbf{BA}$도 계산해 본다. 이것은 영행렬인가?

2단계 제곱의 차

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 어떤 곱에서도 순서를 바꾸지 말고 $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$를 전개한다. 이것이 언제 $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$과 같은가? 소문항 (i)에서 찾은 행렬을 다시 쓸 수 있는가?

3단계 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$의 영이 아닌 해

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $\det \mathbf{A} \neq 0$이면 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$의 양변의 왼쪽에 $\mathbf{A}^{-1}$을 곱한다. $\mathbf{X}$는 무엇이어야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 $ad = bc$인 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 열벡터(column vector) $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$를 시도해 본다. $\mathbf{A}$는 이 벡터들을 어떻게 바꾸는가? 이 중 하나로 영행렬이 아닌 $\mathbf{X}$를 만든다.

4단계 제곱근은 몇 개인가?

다루는 내용: 소문항 (iv)

잠깐, 직접 해 보기 $\mathbf{X}^2 + \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$이 되도록 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$를 고른다. 그러면 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$을 만족하는 행렬 $\mathbf{N}$이 많이 필요하다. $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$을 살펴본다.

숨은 수학

대수로서의 행렬

케일리(Arthur Cayley)는 1858년에 행렬을 단순한 계수의 표가 아니라 더하고 곱할 수 있는 하나의 대상으로 다루는 행렬 대수를 도입하였다. 그는 곱셈이 교환법칙을 만족하지 않는다는 것을 곧바로 알아차렸고, **케일리–해밀턴 정리**(*Cayley–Hamilton theorem*)를 증명하였다. 이 정리는 모든 정사각행렬이 자기 자신의 특성방정식(characteristic equation)을 만족한다는 것이다. 대각합(trace)이 t이고 행렬식이 d인 2×2 행렬에 대해서 이 정리는 $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$임을 말하며, 이 사실은 이 장에서 거듭 사용된다(Section 7.4). 2×2 실수 행렬 전체는 **환**(*ring*)을 이룬다. 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 할 수 있지만 곱셈은 교환법칙을 만족하지 않으며, **영인자**(*zero divisor*), 즉 곱이 영이 되는 영이 아닌 원소들이 존재한다.

무한히 많은 제곱근

단계 4는 훨씬 더 인상적으로 만들 수 있다. 방정식 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$는 뻔한 해 $\pm\mathbf{I}$뿐 아니라, 원점을 지나는 직선에 대한 평면의 모든 반사(reflection) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$도 해로 가진다. 두 번 반사하면 아무것도 변하지 않기 때문이다. 이것은 $\mathbf{I}$의 제곱근이 원 하나만큼 있다는 뜻이다. 계수가 수인 n차 다항식(polynomial)이 많아야 n개의 근을 가지는 것은 수에 영인자가 없기 때문이다. 행렬에는 영인자가 있으므로 이 개수 세기가 성립하지 않는다.

물리학에서의 비가환성

고전역학에서 위치 x와 운동량(momentum) p는 수이며 $xp = px$이다. 양자역학에서 이들은 $xp - px = i\hbar$를 만족하는 연산자(operator, 무한 행렬)가 된다. 여기서 $\hbar$는 플랑크 상수(Planck's constant)를 2π로 나눈 값이다. 이 하나의 비가환 관계로부터 하이젠베르크의 불확정성 원리, 즉 위치와 운동량을 동시에 정확히 알 수 없다는 사실이 나온다. 1925년 하이젠베르크가 양자역학의 규칙을 발견했을 때 그는 행렬이 무엇인지 알지 못했다. 하이젠베르크가 고안한 이상한 곱셈 규칙이 바로 행렬의 곱셈이라는 것을 알아본 사람은 막스 보른(Max Born)이었다.

더 도전하기

1 **언제 교환되는가?** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$과 교환되는 2×2 행렬을 모두 구하여라.

2 **영행렬의 제곱근.** $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$인 2×2 실수 행렬 $\mathbf{N}$을 모두 구하여라. (힌트: 케일리–해밀턴 정리를 사용하여 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \det\mathbf{N} = 0$임을 보여라.)

3 **반사.** 모든 반사 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$을 제곱하면 $\mathbf{I}$가 됨을 보이고, 이 행렬이 반사의 기준으로 삼는 직선을 구하여라.

4 **케일리–해밀턴.** 모든 2×2 행렬이 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$을 만족함을 직접 계산하여 증명하여라.

더 읽을거리

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 가장 널리 쓰이는 입문 선형대수(linear algebra) 교재로, 이해를 강조한다.
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*** (Springer; 온라인 무료). 행렬보다 선형사상(linear map)을 중심에 둔, 좀 더 추상적인 접근이다.
- **Jim Baggott, *The Quantum Story*** (Oxford University Press). 하이젠베르크의 행렬역학을 포함한 양자역학의 역사이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 7.1절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/matrix-rules.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com