6.8 특이행렬로 이루어진 군

학습지

문제

STEP III 1996, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s3-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 소문항 (i)에서 단위행렬 $\mathbf{I}$는 $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ 꼴이 아니다. 그렇다면 S의 항등원은 무엇일 수 있을까?

1단계 닫혀 있음

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** 네 성분이 모두 a인 행렬을 $\mathbf{M}_a$로 나타내자. $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b$는 무엇인가?

2단계 군의 공리

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 단위행렬(identity matrix) $\mathbf{I}$는 S에 속하지 않는다. 그렇다면 S의 항등원(identity)은 무엇이 될 수 있을까? $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a$를 e에 대하여 풀어 보아라.

잠깐, 직접 해 보기 역원(inverse)을 구하려면 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_e$를 b에 대하여 풀어 보아라.

3단계 특이성은 퍼진다

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 $\mathbf{A} \in G$가 특이(singular)행렬이고 $\mathbf{B}$가 G의 임의의 원소라고 하자. $\mathbf{A}$의 군 안에서의 역원을 이용하여, G의 어떤 원소 $\mathbf{C}$에 대하여 $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$로 나타내어라. 그런 다음 양변의 행렬식(determinant)을 구하여라.

4단계 3×3 **예**

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 소문항 (i)을 3×3 행렬로 일반화할 수 있는가? 아니면 세 좌표 중 두 좌표를 무시하는 행렬을 이용하여 더 간단한 예를 찾을 수 있는가?

숨은 수학

멱등원과 숨은 가역성

임의의 행렬군의 항등원 $\mathbf{E}$는 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$를 만족한다. 즉 **멱등**(*idempotent*)이다. 기하적으로 멱등 행렬은 **사영**(*projection*)이다. 즉 모든 벡터를 어떤 부분공간(subspace) 위로 보내고, 그 부분공간 안의 벡터는 그대로 둔다. 소문항 (i)에서 $\mathbf{E}$는 평면을 직선 $y = x$ 위로 사영하고, 각 행렬 $\mathbf{M}_a$는 먼저 그 직선 위로 사영한 다음 직선을 따라 $2a$배로 늘인다(그림 6.8.1). 직선 위에서 이 군은 가역인 늘이기로 작용하며, 직선에 수직인 방향은 그냥 무시한다. 따라서 S는 실제로는 곱셈에 대한 0이 아닌 실수의 군($\mathbf{M}_a \mapsto 2a$를 통해)이 평면 안의 한 직선 위에 놓여 있는 것이다. 이는 일반적으로도 참이다. 모든 행렬군은 기저 변환(change of basis)을 하고 나면, 항등원의 상(image) 위에 작용하는 가역 행렬들의 군에 0을 덧붙인 것이다.

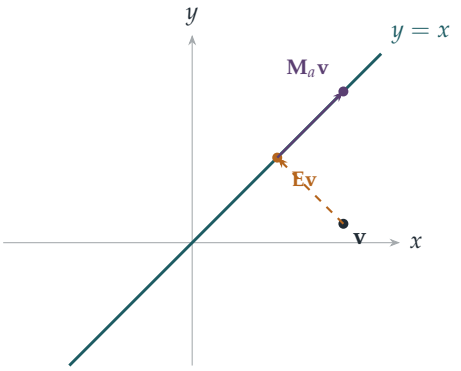

그림 6.8.1 소문항 (i)의 행렬들이 하는 일. 항등원 $\mathbf{E}$는 모든 벡터 $\mathbf{v}$를 직선 $y = x$ 위로 사영한다(호박색, 점선). 각 $\mathbf{M}_a$는 같은 사영을 한 다음 직선을 따라 $2a$배로 늘인다(자주색. 여기서는 $2a = \frac{16}{9}$). 직선 위에서 이 군은 보통의 가역인 배율 변환으로 작용한다.

추상과 구체

사람들이 처음 연구한 군은 치환(permutation), 대칭(symmetry), 가역 행렬처럼 구체적인 것이었다. 추상적인 정의(세 공리(axiom)를 만족하는 연산이 주어진 집합)는 이런 예들로부터 걸러 낸 것이다. 이 문제는 추상적인 관점의 가치를 보여 준다. 하나는 특이 행렬로, 다른 하나는 수로 이루어져 있는데도 S와 곱셈에 대한 0이 아닌 실수의 군은 **동형**(*isomorphic*)이다. 즉 옷만 다르게 입은 같은 군이다. 겉모습이 다른 두 구조가 언제 "같은지" 알아보는 것은 대수학의 핵심 기술 가운데 하나이며, 동형이라는 개념은 수학자들이 이를 엄밀하게 표현하는 방법이다.

더 도전하기

1 **동형사상.** 사상 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$가 S에서 0이 아닌 실수로의 일대일 대응(one-to-one correspondence)이며, 행렬의 곱셈을 수의 곱셈으로 바꾼다는 것을 보여라.

2 **군이 아닌 경우.** $a \neq 0$인 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$의 집합은 곱셈에 대하여 닫혀 있지만 군이 아님을 보여라. (**힌트**: 항등원을 찾아보라. 좌항등원(left identity)이 있는가? 우항등원(right identity)은?)

3 **멱등 행렬.** $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$인 2×2 실행렬 $\mathbf{E}$를 모두 구하라. 이들을 기하적으로 설명하라.

4 **모든 성분이 같은 행렬.** 모든 성분이 $a \neq 0$인 $n \times n$ 행렬들이 곱셈에 대하여 군을 이룸을 보이고, 그 항등원을 구하라.

더 읽을거리

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer). 행렬군과 동형사상을 많은 기하적 예와 함께 다룬다.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge). 사영과 멱등 행렬을 명쾌하게 설명한다.
- **Joseph Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*** (CRC Press). 특이한 군의 예가 많이 담긴 친절한 입문서이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 6.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/singular-group.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com