6.7 사원수군

학습지

문제

STEP III 1993, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q5

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 쌍 (z_1, z_2)를 "수" $z_1 + z_2\mathrm{j}$를 나타내는 것으로 생각하자. 여기서 j는 $\mathrm{j}^2 = -1$이고 복소수 w에 대하여 $\mathrm{j}w = w^*\mathrm{j}$를 만족하는 새로운 기호이다. 이 규칙을 써서 $(z_1 + z_2\mathrm{j})(w_1 + w_2\mathrm{j})$를 곱해 보라. $\circ$의 공식이 나오는가?

1단계 행렬을 이용한 결합법칙

다루는 내용: 결합법칙(associativity)

생각해 보기 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$를 직접 확인하려면 계산이 길다. 더 깔끔한 방법은 없을까?

잠깐, 직접 해 보기 (z_1, z_2)를 복소행렬(complex matrix) $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$에 대응시켜 보자. 이런 행렬 두 개를 곱하면 첫째 행은 무엇이 되는가? 행렬의 곱셈은 결합법칙을 만족한다.

2단계 교환법칙이 성립하지 않는다

다루는 내용: 교환법칙(commutativity)과 네 가지 곱

생각해 보기 $(0,1)\circ(\mathrm{i},0)$과 $(\mathrm{i},0)\circ(0,1)$을 계산해 보자. 그다음 정의에 $\circ$을 넣어 네 가지 특별한 곱을 구한다.

3단계 원소가 여덟 개인 군

다루는 내용: 집합 S_1

생각해 보기 네 가지 특별한 곱을 이용하여 S_1이 연산에 대하여 닫혀 있음(closed)을 보여라. 항등원(identity)은 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 각 원소의 제곱을 구하라. 어떤 원소가 제곱하여 항등원이 되고, 어떤 원소가 제곱하여 $(-1, 0)$이 되는가? 이를 이용하여 각 원소의 위수(order)와 역원(inverse)을 구하라.

4단계 부분군

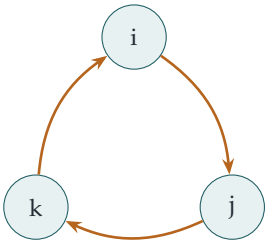
다루는 내용: 부분군(subgroup)과 행렬

생각해 보기 B의 거듭제곱을 구하라. 그다음 주어진 행렬의 거듭제곱을 구하라. 둘을 서로 대응시켜 보자.

숨은 수학

복소수 너머

실수는 덧셈, 곱셈, 나눗셈을 할 수 있는 1차원 수 체계를 이루고, 복소수는 2차원 수 체계를 이룬다. 해밀턴의 사원수는 4차원이며 여전히 나눗셈을 할 수 있지만, 곱셈은 더 이상 교환법칙을 만족하지 않는다(그림 6.7.1). 1878년 프로베니우스(Ferdinand Frobenius)는 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$(해밀턴의 머리글자) 이 세 가지가 실수 위의 유한 차원 "나눗셈 대수"(division algebra) 가운데 곱셈이 결합법칙을 만족하는 유일한 것임을 증명했다. 결합법칙을 포기하되, 실수, 복소수, 사원수에서처럼 크기가 곱셈적인 성질 $|xy| = |x|\,|y|$를 유지하면 정확히 하나가 더 있다. 1840년대에 John Graves와 케일리(Arthur Cayley)가 발견한 8차원의 **팔원수**(octonions)이다. 1898년 후르비츠(Adolf Hurwitz)는 이 네 가지가 그러한 체계의 전부임을 증명했다. (크기에 대한 조건을 빼면 이보다 더 기묘한 비결합 나눗셈 대수가 또 있지만, 보트(Raoul Bott), 밀너(John Milnor), 케르베르(Michel Kervaire)가 1958년에 증명한 깊은 정리에 따르면 모든 유한 차원 실수 나눗셈 대수의 차원은 $1, 2, 4, 8$ 중 하나이다.)



화살표 방향: $ij = k, jk = i, ki = j$

반대 방향: $ji = -k, kj = -i, ik = -j$

그리고 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

그림 6.7.1 해밀턴의 곱셈 규칙. i, j, k 중 두 개를 화살표 방향으로 곱하면 나머지 하나가 되고, 화살표 반대 방향으로 곱하면 나머지 하나에 음의 부호를 붙인 것이 된다. 여덟 개의 원소 $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$는 이 문제의 사원수군 Q_8을 이룬다.

3차원의 회전

절댓값이 1인 사원수는 3차원 공간의 회전을 나타낸다. 단위 축 $\mathbf{u}$를 중심으로 각 θ만큼 회전하는 것은 $q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(u_1 i + u_2 j + u_3 k)$에 대응하고, 이는 벡터 $\mathbf{v}$($v_1 i + v_2 j + v_3 k$로 쓴다)에 $\mathbf{v} \mapsto q\mathbf{v}q^{-1}$로 작용한다. 회전을 합성하는 것은 사원수를 곱하는 것이다. 이 방법은 행렬이나 각을 쓰는 것보다 효율적이고 수치적으로 안정적이며, "짐벌 잠금"(gimbal lock)을 피할 수 있다. 짐벌 잠금은 자유도 하나를 잃는 현상으로, 아폴로 우주비행사들은 자이로스코프 기반 항법 장치를 쓰면서 이 문제를 피해 가야 했다. 반각 $\frac{\theta}{2}$는 깊은 사실에 대한 단서이기도 하다. 360°만큼 회전하면 1이 아니라 $q = -1$이 되는데, 물리학자들은 이 사실을 전자의 행동(스핀(spin))에서 관찰한다.

네 제곱수

사원수의 절댓값은 복소수의 절댓값과 마찬가지로 곱셈적이다. 즉 $|pq| = |p||q|$이다. 이를 풀어 쓰면 오일러(Euler)의 **네 제곱수 항등식**(four-square identity)을 얻는다. 네 제곱수의 합 두 개의 곱은 그 자체로 네 제곱수의 합이라는 것이다. 이는 모든 양의 정수가 네 제곱수의 합이라는 라그랑주(Lagrange)의 정리에서 핵심 단계이다. 이 정리는 Section 7.8에서 증명하며, Section 1.6의 두 제곱수 결과의 4차원 사촌이다.

더 도전하기

1 **해밀턴의 규칙.** 쌍을 이용하여 $C \circ B = D$이고 $B \circ C = H$임을, 즉 $ij = k$이고 $ji = -k$임을 확인하라.

2 **위수가 2인 원소는 하나뿐.** Q_8에서 위수가 2인 원소는 $E = -1$뿐임을 보여라. 이로부터 Q_8이 정사각형의 대칭군(위수가 2인 원소가 다섯 개이다)과 동형이 아님을 보여라.

3 **네 제곱수.** $\det M(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$임을 보여라. $\det(M_1 M_2) = \det M_1 \det M_2$를 이용하여, 네 제곱수의 합 두 개의 곱이 네 제곱수의 합임을 보여라.

4 **부분군.** Q_8의 부분군을 모두 구하라. $\{A\}$가 아닌 모든 부분군은 E를 포함함을 보이고, Q_8이 위수가 4인 세 순환 부분군의 합집합임을 보여라(Section 6.6와 비교해 보라).

더 읽을거리

- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions*** (A. K. Peters). 사원수와 팔원수의 기하학과 산술을 다룬다. 수준이 높지만 매혹적이다.
- **John Baez, "The octonions"**, *Bulletin of the American Mathematical Society* 39 (2002); 온라인에서 무료로 볼 수도 있다. 훌륭한 개관 논문이며, 서론은 지금 읽어도 이해할 수 있다.
- **Andrew Hanson, *Visualizing Quaternions*** (Morgan Kaufmann). 회전을 위한 사원수를 그래픽스 응용과 함께 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 6.7절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/quaternions.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com