6.6 부분군의 합집합

학습지

문제

STEP II 1988, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/88-s2-q9

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 K가 부분군이고 $a \in K$이지만 $b \notin K$일 때, ab가 K에 속할 수 있을까?

1단계 두 부분군으로는 덮을 수 없다

다루는 내용: 두 부분군

생각해 보기 G_1과 G_2 가운데 어느 것도 G 전체가 아니라고 가정하자. $a \notin G_1$, $b \notin G_2$인 원소를 고른다. a와 b는 각각 어디에 있어야 하는가?

잠깐, 직접 해 보기 이제 ab를 살펴보자. ab는 G_1 또는 G_2에 속한다. 각 경우에 a 또는 b를 그 부분군(subgroup)의 원소들의 곱(product)으로 나타내어 보자.

2단계 세 부분군으로는 덮을 수 있다

다루는 내용: 세 부분군

잠깐, 직접 해 보기 모든 원소가 자기 자신의 역원(inverse)인 작은 군(group)을 생각해 보자. 원소가 두 개인 부분군은 무엇인가?

숨은 수학

대칭의 언어

군은 19세기에 여러 방향에서 동시에 생겨났다. 다항식의 근의 치환에 대한 갈루아(Galois)의 연구(Section 6.4), 치환에 관한 코시(Cauchy)의 연구, 그리고 기하학과 결정학에서의 대칭 연구가 그것이다. 세 공리를 만족하는 것이면 무엇이든 군이라고 하는 위의 추상적인 정의는 19세기 말에 자리 잡았다. 이 정의의 힘은 일반성에 있다. 이 문제의 정리처럼 공리로부터 증명한 정리는 수의 군, 행렬의 군, 대칭의 군, 치환의 군에서 동시에 성립한다. 오늘날 군은 어디에나 있다. 입자물리학(표준 모형은 대칭군 위에 세워져 있다), 화학(분자의 대칭이 스펙트럼을 결정한다), 암호학(타원곡선 군, Section 1.9), 그리고 루빅스 큐브 풀이에도 군이 쓰인다.

부분군이 몇 개 필요할까?

이 문제에서 자연스러운 질문이 떠오른다. 합집합이 군 전체가 되는 진부분군의 최소 개수는 얼마일까? 이 문제에 따르면 그 수는 결코 2가 아니다. 1926년에 Gaetano Scorza는 군이 세 진부분군의 합집합이 될 필요충분조건이 클라인 4원군을 "몫군(quotient)"으로 가지는 것임을 보였다. 1994년에 J. H. E. Cohn은 일반적인 문제를 연구하여 여러 결과를 추측하였고, 1997년에 M. J. Tomkinson은 3부터 6까지의 모든 수는 이 최소 개수로 나타나지만, 이 최소 개수가 7인 군은 존재하지 않음을 증명하였다. 이처럼 진술은 간단하지만 놀랄 만큼 미묘한 질문은 군론의 전형적인 모습이다.

벡터 공간

비슷한 논증으로, 실수 위의 벡터 공간(vector space)(평면이나 3차원 공간 같은 것)은 결코 유한 개의 진부분공간(proper subspace)의 합집합이 될 수 없음을 보일 수 있다. 즉 평면은 원점을 지나는 유한 개의 직선의 합집합이 아니다. 그러나 유한체(finite field) 위에서는 가능하다. 원소가 두 개인 체 위의 평면은 바로 클라인 4원군이며, 이는 세 직선의 합집합이다.

더 도전하기

1 **군인지 확인하기.** 클라인 4원군의 곱셈표를 작성하고 군의 공리를 확인하라. 이 군이 곱셈에 대한 군 $\{1, i, -1, -i\}$와 같지 않음을 보여라. (**힌트:** 자기 자신의 역원인 원소는 어느 것인가?)

2 **순환군.** 모든 원소가 한 원소 g의 거듭제곱일 때 그 군을 **순환군**(cyclic group)이라 한다. 순환군은 진부분군을 몇 개 쓰더라도 그 합집합이 될 수 없음을 보여라. (**힌트:** g를 포함하는 부분군은 어느 것인가?)

3 **정수.** $(\mathbb{Z}, +)$가 부분군 $2\mathbb{Z}$(짝수 전체)와 $3\mathbb{Z}$(3의 배수 전체)의 합집합이 아님을 직접 보여라. 이 군은 어떤 두 진부분군의 합집합이 될 수 있는가?

4 **평면 위의 직선.** 심화 평면 $\mathbb{R}^2$가 원점을 지나는 유한 개의 직선의 합집합이 아님을 보여라. (**힌트:** 각 직선은 원점을 제외하면 포물선 $y = x^2$ 위의 점을 많아야 하나 포함한다.)

더 읽을거리

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*** (Springer). 『군과 대칭』. 기하학적 예를 중심으로 전개하며 그림이 아름다운 입문서이다.
- **Nathan Carter, *Visual Group Theory*** (Mathematical Association of America). 『시각적 군론』. 그림으로 군을 배우는 책으로, 대학 입학 전에 읽기에 이상적이다.
- **Peter Neumann, Gabrielle Stoy & Edward Thompson, *Groups and Geometry*** (Oxford University Press). 『군과 기하학』. 옥스퍼드 대학 1학년 과정의 고전적인 교재이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 6.6절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/subgroup-unions.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com