6.4 사차방정식 풀기

학습지

문제

STEP III 2017, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q3

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 네 대상 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$를 두 쌍으로 나누는 방법은 몇 가지인가?

1단계 빠진 계수(coefficient)

다루는 내용: A 구하기

생각해 보기 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$를 두 쌍으로 나누는 방법은 몇 가지인가?

잠깐, 직접 해 보기 $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$에서 근(root)의 합은 무엇인가? 또 세 양 $\alpha\beta + \gamma\delta$, ...의 합을 사차방정식(quartic)의 계수로 나타내면 무엇인가?

2단계 구체적인 삼차방정식(cubic)

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $p=0, q=3, r=-6, s=10$을 대입한다. 상수항(constant term)의 작은 약수(divisor)를 넣어 본다.

3단계 근의 쌍

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$는 두 근끼리의 곱 여섯 개를 모두 더한 것에서 그중 하나를 뺀 것이다. 또 $\alpha\beta\cdot\gamma\delta$는 무엇인가?

4단계 사차방정식 풀기

다루는 내용: 소문항 (iii)

> **잠깐, 직접 해 보기** $\alpha+\beta$와 $\gamma+\delta$의 합과 곱은 이미 알고 있다. 어느 쪽이 어느 것인지 정하려면 세 근씩 곱한 것들의 합을 $\alpha\beta, \gamma\delta, \alpha+\beta, \gamma+\delta$로 나타내고 r을 이용한다.

숨은 수학

이 요령이 통하는 이유: 근의 치환

1770년 조제프루이 라그랑주(Joseph-Louis Lagrange)는 삼차방정식과 사차방정식의 풀이법이 왜 통하는지 물었고, 그 답을 근의 **치환**(permutation)에서 찾았다. 네 근을 재배열하는 방법은 24가지이다. 이 모든 재배열에서 세 양 $y_1 = \alpha\beta+\gamma\delta$, $y_2 = \alpha\gamma+\beta\delta$, $y_3 = \alpha\delta+\beta\gamma$는 자기들끼리 뒤섞일 뿐이다. 네 근의 각 재배열은 세 짝짓기의 재배열을 유도한다(그림 6.4.1). 따라서 이 세 양은 계수가 근에 대해 대칭인 3차 다항식을 만족한다. 현대적인 언어로 말하면, 대칭군(symmetric group) S_4(24개의 모든 치환)에서 S_3(짝짓기의 6가지 치환)로 가는 전사 군 준동형사상(group homomorphism)이 존재하며, 이것이 사차방정식을 삼차방정식으로 줄일 수 있는 이유이다.

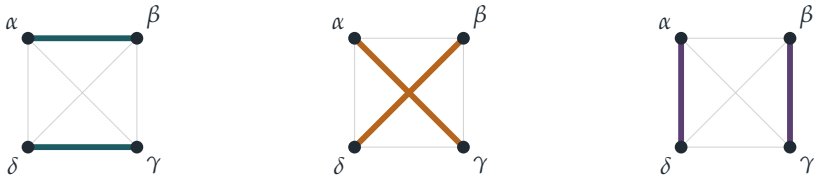

그림 6.4.1 네 근을 두 쌍으로 나누는 세 가지 방법과, 그에 대응하는 분해 삼차방정식의 근. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$를 어떻게 재배열하든 이 세 그림은 자기들끼리 치환될 뿐이다. 이 때문에 세 양은 계수를 사차방정식의 계수로 나타낼 수 있는 삼차방정식을 만족한다.

오차방정식

라그랑주는 다섯 근에 대해서도 근의 치환에 따라 몇 가지 값만 취하는 비슷한 양을 찾으려 했지만, 쓸모 있는 것을 찾지 못했다. 1799년 파올로 루피니(Paolo Ruffini)가, 그리고 1824년 닐스 헨리크 아벨(Niels Henrik Abel)이 (증명을 완성하여) 사칙연산과 거듭제곱근(radical)만으로 오차방정식의 근을 나타내는 일반적인 공식은 존재하지 않음을 보였다. 몇 년 뒤 에바리스트 갈루아는 어떤 다항식이 거듭제곱근으로 풀리는지 정확히 설명했다. 바로 **근의 대칭군**을 특정한 방식으로 더 단순한 조각들로 분해할 수 있는 다항식이다. 대칭군 S_4는 (S_3와 더 작은 군들을 거쳐) 분해할 수 있지만, S_5는 더 이상 분해할 수 없는 크기 60의 "단순(simple)" 조각을 포함하므로 분해할 수 없다. 갈루아는 1832년 스무 살의 나이로 결투에서 목숨을 잃기 전날 밤, 서둘러 자신의 이론을 글로 남겼다. 이 이론은 오늘날 수학과 학부 과정의 백미 중 하나이며, 보통 3학년에 배운다.

삼차방정식 풀기

삼차방정식 자체도 비슷한 요령으로 풀 수 있다. 축약 삼차식(depressed cubic) $x^3 - 3px + q$를 두 완전세제곱식의 결합으로 나타내면 이차방정식으로 줄어든다. 이것이 연습문제에 있는 2011년 문제의 방법이며, 카르다노의 공식과 동치이다. 삼차방정식이 세 실근을 가질 때에도 이 공식은 계산 과정에서 복소수(complex number)를 필요로 하는데, 바로 이 현상 때문에 수학자들은 복소수를 진지하게 받아들일 수밖에 없었다(5장의 도입 참고).

더 도전하기

1 **삼차방정식 확인하기.** $y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$ 등일 때 $y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = pr - 4s$임을 확인하라. (전개한 뒤 $\sum \alpha = -p, \sum \alpha\beta\gamma = -r, \alpha\beta\gamma\delta = s$를 이용하라.)

2 **세제곱의 합으로 본 삼차방정식.** STEP III 2011, 3번 문제 (step.maths.org/questions/11-s3-q3)을 풀어 보라. 이 문제는 삼차방정식을 두 세제곱식의 결합으로 나타내어 푸는데, 이 절의 방법과는 상당히 다른 길이다. 답을 수치적으로 확인해 보라.

3 **또 하나의 사차방정식.** 이 절의 방법으로 $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = 0$을 풀어라. (분해 삼차방정식의 한 근은 작은 정수이다.)

4 **치환 세기.** $\alpha, \beta, \gamma, \delta$의 24가지 치환 가운데 짝짓기 $\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$를 자기 자신으로 보내는 것을 모두 찾아라. 그런 치환이 8개임을 보여라. (이들은 S_4의 부분군(subgroup)을 이룬다.)

더 읽을거리

- **Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved*** (Simon & Schuster). 오차방정식과 군론의 탄생 이야기를 일반 독자를 위해 풀어낸 책이다.
- **Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry*** (Basic Books). 바빌로니아의 방정식에서 갈루아와 그 너머까지 다룬다.
- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press). 학부 교재로, 바로 이 내용을 다루는 역사적 도입부가 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 6.4절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/quartic.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com