6.3 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$를 근으로 갖는 다항식

학습지

문제

STEP II 2023, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $\sqrt{2}$를 근으로 갖는 다항식을 찾으려면 $x = \sqrt{2}$의 양변을 제곱하여 제곱근을 없앤다. 서로 다른 두 제곱근은 어떻게 하나씩 없앨 수 있을까?

1단계 두 개의 제곱근

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $(x - \sqrt{2})^2 = 3$을 전개한다. 남은 제곱근(square root)을 한쪽 변에 따로 두고 양변을 제곱한다.

2단계 세 개의 제곱근

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$라 하자. 그러면 $x-\sqrt{5}$는 f의 근(root)이다.

잠깐, 직접 해 보기 $\mathrm{f}(x-\sqrt{5})=0$을 $P(x)+\sqrt{5}\,Q(x)=0$ 꼴로 나타낸다. 그다음 $\sqrt{5}$를 한쪽 변에 따로 두고 양변을 제곱한다.

3단계 삼차식과 제곱근

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $x = a + \sqrt{2}$이면 $x - \sqrt{2}$는 $t^3 - 3t + 1$의 근이다. 이를 대입하고, $\sqrt{2}$가 있는 항과 없는 항을 나눈 다음 양변을 제곱한다.

4단계 두 개의 세제곱근

다루는 내용: 소문항 (iv)

잠깐, 직접 해 보기 제곱해서는 세제곱근(cube root)이 없어지지 않는다. $x = \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$이라 하고 $(u+v)^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$를 이용하여 양변을 세제곱한다. 무엇이 남는가? 그리고 그것은 어떻게 없앨 수 있는가?

숨은 수학

체와 그 차수

p, q가 유리수일 때 $p+q\sqrt{2}$ 꼴인 수 전체의 집합 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, (0이 아닌 수로의) 나눗셈에 대하여 닫혀 있다. 즉 이 집합은 **체**(field)이다. 이 체는 $\mathbb{Q}$ 위의 2차원 "벡터 공간"(vector space)이고 기저(basis)는 $1, \sqrt{2}$이므로, $\mathbb{Q}$ 위에서 **차수**(degree)가 2라고 한다. 여기에 $\sqrt{3}$을 첨가하면 기저가 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$이고 차수가 4인 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$을 얻고, $\sqrt{5}$까지 첨가하면 차수가 8이 된다(그림 6.3.1). **탑 법칙**(tower law)에 따르면 체의 탑을 따라 올라가면서 차수는 곱해진다. 어떤 수가 생성하는 체의 차수는 그 수의 **최소다항식**(minimal polynomial), 곧 그 수를 근으로 갖는 유리수 계수 다항식 가운데 차수가 가장 낮은 것의 차수와 같다. 이 문제의 다항식 f와 g가 최소다항식임을 보일 수 있으므로, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$의 차수는 4이고 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$의 차수는 8이다. 실제로 수 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 하나가 차수 8인 체 전체를 생성한다.

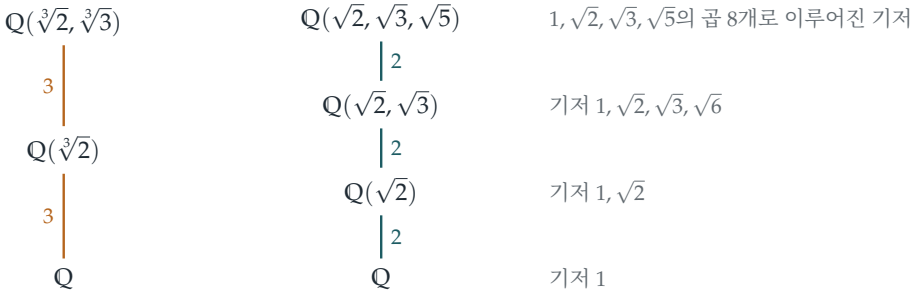

그림 6.3.1 체의 탑. 오른쪽: 제곱근을 하나 첨가할 때마다 차수가 두 배가 되어 $2 \times 2 \times 2 = 8$, 곧 g의 차수가 된다. 왼쪽: 세제곱근을 하나 첨가할 때마다 차수가 세 배가 되어 $3 \times 3 = 9$, 곧 k의 차수가 된다. 탑을 따라 올라가면서 차수는 곱해진다. 이 **탑 법칙**이 자와 컴퍼스 작도의 불가능성 증명의 열쇠이다.

정육면체의 배적 문제

자와 컴퍼스를 이용한 작도(ruler-and-compass construction)로 얻을 수 있는 길이는 유리수에서 출발하여 일차방정식과 이차방정식을 거듭 풀어 얻는 길이뿐이다. 이러한 각 단계는 차수가 1 또는 2인 체의 확대를 주므로, 탑 법칙에 의해 작도 가능한 길이는 모두 차수가 2의 거듭제곱인 체에 속하고, 그 길이 자체의 차수도 2의 거듭제곱이다. 그런데 $\sqrt[3]{2}$의 최소 다항식은 차수가 3인 $x^3 - 2$이다. 3은 2의 거듭제곱이 아니므로 $\sqrt[3]{2}$는 작도할 수 없고, 따라서 기원전 430년 무렵에 제기된, 자와 컴퍼스로 정육면체의 부피를 두 배로 만드는 델로스 문제(Delian problem)는 불가능하다. Pierre Wantzel은 1837년에 이를 증명하였고, 아울러 일반적인 각의 삼등분이 불가능함과 작도 가능한 정다각형의 분류(Section 6.2)도 증명하였다. 이천 년에 걸친 시도가 차수에 관한 논증 하나로 끝난 것이다.

대수적 수는 체를 이룬다

이 문제의 방법은 몇 가지 예에서 대수적 수의 합이 대수적 수임을 보여 준다. 일반적인 경우는 선형대수로 증명한다. α와 β의 차수가 각각 m과 n이면, $(i < m, j < n$인$)$ 수 $\alpha^i \beta^j$ 전체는 차원이 최대 mn인 공간을 생성(span)하므로, $mn + 1$개의 거듭제곱 $1, \alpha + \beta, (\alpha + \beta)^2, \ldots$은 일차 종속(linearly dependent)이어야 하고, 이로부터 차수가 최대 mn인 다항식을 얻는다. 우리가 얻은 차수 $4 = 2 \times 2$, $6 = 3 \times 2$, $9 = 3 \times 3$은 이 패턴에 정확히 들어맞는다. 대수적 수가 아닌 수를 **초월수**(transcendental number)라 한다. e와 π가 그 예이며(에르미트(Hermite), 1873년, 린데만(Lindemann), 1882년), π가 초월수라는 린데만의 정리는 원과 넓이가 같은 정사각형의 작도 역시 불가능함을 증명하였다.

더 도전하기

1 **원시원소.** $y = \sqrt{2}+\sqrt{3}$이라 하자. $y^3 = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$임을 보이고, 이로부터 $\sqrt{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 9y)$임을 이끌어 내어라. 따라서 모든 수 $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}+s\sqrt{6}$은 y에 대한 다항식으로 나타낼 수 있다.

2 **섞인 근호.** $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$을 근으로 갖는, 정수 계수의 6차 다항식을 구하여라.

3 **기약성(irreducibility).** $x^4 - 10x^2 + 1$은 유리수 근을 갖지 않으며, 정수 계수 이차식 두 개의 곱으로 나타낼 수 없음을 보여라. (**힌트:** $(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$ 꼴을 시도해 보라.) 이로부터 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$의 차수가 4임을 이끌어 내어라.

4 **삼등분.** $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$임을 보이고, 이로부터 $\cos 20^\circ$가 $8x^3 - 6x - 1 = 0$의 근임을 이끌어 내어라. 이 삼차식이 유리수 근을 갖지 않는다고 할 때(이를 확인하라), 자와 컴퍼스로 60°인 각을 삼등분할 수 없는 이유를 설명하여라.

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press). 갈루아 이론. 체의 확대, 탑 법칙, 고전적인 작도 문제를 학부생을 위해 다룬다.
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?*** (Oxford University Press). 수학이란 무엇인가. 제 3장에서 선수 지식 없이 그리스 작도 문제의 불가능성을 증명한다.
- **Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*** (Springer). 기하학: 유클리드와 그 너머. 자와 컴퍼스 작도를 현대 대수학으로 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 6.3절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/field-extensions.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com