6.2 가우스의 정17각형

학습지

문제

STEP II 1991, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s2-q4

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 정17각형에 관한 문제에 왜 $\cos\frac{2\pi}{5}$에 관한 첫 부분이 나오는가?

1단계 정오각형

다루는 내용: 첫 번째 부분, $\phi = \frac{2\pi}{5}$

생각해 보기 $y^2 = (\cos\phi + \cos 2\phi)^2$을 전개하고, $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\big(\cos(A+B) + \cos(A-B)\big)$를 이용하여 각 곱을 합으로 바꾼다.

잠깐, 직접 해 보기 $5\phi = 2\pi$를 이용하여 $\cos 3\phi$와 $\cos 4\phi$를 간단히 한다. 이차방정식(quadratic equation)의 두 근 중 어느 것이 맞는 근인가?

2단계 17개의 1의 거듭제곱근의 합은 0이다

다루는 내용: $\theta = \frac{2\pi}{17}$일 때 코사인들의 합

생각해 보기 $\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta$는 $\omega = e^{i\theta}$에 대한 등비급수(geometric series)의 실수부이다. 그 합은 얼마인가?

잠깐, 직접 해 보기 $\cos(17-k)\theta = \cos k\theta$를 이용하여 항들을 짝지어 묶는다.

3단계 코사인들을 두 묶음으로 나누기

다루는 내용: z의 값

생각해 보기 나머지 네 코사인의 합 $\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta$를 z'이라 하자. $z + z'$은 얼마인가?

잠깐, 직접 해 보기 zz'을 계산한다. 16개의 곱으로 전개하고, 각 곱을 두 코사인의 합으로 바꾼 다음 각을 간단히 한다. $\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$는 각각 몇 번씩 나타나는가?

4단계 이차방정식

다루는 내용: z의 값

> **생각해 보기** z와 z'은 어떤 이차방정식의 두 근이다. 어느 근이 z인가? z에 들어 있는 네 코사인의 값을 어림해 본다.

숨은 수학

가우스 주기

왜 $\{1,2,4,8\}$인가? 17을 법으로 할 때, 3의 거듭제곱 $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$은 0이 아닌 모든 나머지(residue)를 거친다.

$$1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6.$$

하나 걸러 하나씩, 즉 $3^0, 3^2, 3^4, \ldots$을 택하면 1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2가 나오는데, 이는 17을 법으로 ±1, ±2, ±4, ±8이며, 정확히 z에 들어 있는 각들이다. 나머지 절반은 $\pm3, \pm5, \pm6, \pm7$로, z'에 들어 있는 각들이다. 가우스는 이러한 묶음에 걸친 ω^k의 합을 **주기**(*period*)라고 불렀다. $17 - 1 = 16 = 2^4$이므로 나머지들을 네 번 반으로 나눌 수 있고, 각 단계에서 주기들은 이전 단계의 주기들이 계수에 들어 있는 이차방정식을 만족한다. 이차방정식 네 개, 즉 제곱근 네 개를 거쳐 유리수에서 $\cos\frac{2\pi}{17}$까지 내려갈 수 있다.

$$\cos\tfrac{2\pi}{17} = \tfrac{1}{16}\Big(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Big).$$

모든 단계에 제곱근만 들어 있고, 제곱근은 (닮은 삼각형이나 반원을 이용하여) 자와 컴퍼스로 작도할 수 있으므로, 정17각형은 작도 가능(constructible)하다.

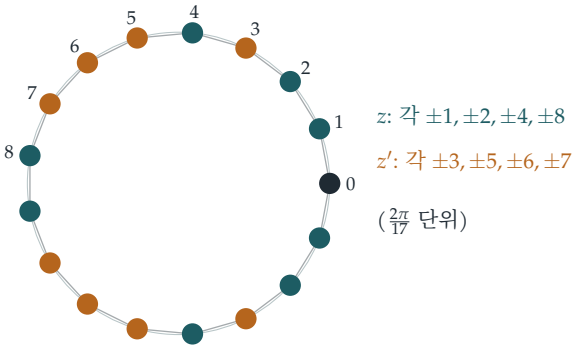

그림 6.2.1 가우스의 두 주기로 나눈 정17각형의 꼭짓점. 청록색 꼭짓점은 ($\frac{2\pi}{17}$ 단위로) 각 $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$에 있으며, 이들의 x좌표의 합은 $2z = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$이다. 호박색 꼭짓점은 $2z' = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$을 준다.

어떤 다각형을 작도할 수 있는가?

가우스가 주장하고 1837년 피에르 방첼(Pierre Wantzel)이 증명한 바에 따르면, 정n각형을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는 것은 n이 2의 거듭제곱과 서로 다른 **페르마 소수**(*Fermat prime*)들의 곱의 곱일 때, 그리고 그때뿐이다. 페르마 소수란 $2^{2^m}+1$ 꼴의 소수이다. 알려진 페르마 소수는 3, 5, 17, 257, 65537이며, 이는 Section 1.1의 페르마 수이다. (페르마(Fermat)는 이런 수가 모두 소수라고 추측했지만, 오일러(Euler)가 $2^{32}+1$이 641로 나누어떨어짐을 보였고, 그 뒤로 더 이상의 페르마 소수는 발견되지 않았다.) 따라서 정257각형과 정65537각형은 작도 가능하다. 19세기에 Johann Hermes는 약 십 년에 걸쳐 정65537각형의 작도법을 완성했고, 그의 원고는 괴팅겐에 보관되어 있다. 정7각형과 정11각형은 작도할 수 없는데, 7과 11이 페르마 소수가 아니기 때문이다($7-1=6$과 $11-1=10$은 2의 거듭제곱이 아니다). 정9각형도 작도할 수 없는데, $9=3^2$에서 페르마 소수 3이 반복되기 때문이다. 방첼의 증명은 Section 6.3에서 다루는 체의 차수(degree of a field extension) 이론을 이용한다.

더 도전하기

1 **정칠각형.** STEP II 1995, 6번 문제 (step.maths.org/questions/95-s2-q6)을 풀어 보라. 단위근을 묶는 가우스의 아이디어를 7제곱 단위근에 적용하여, 코사인의 합과 사인의 합의 정확한 값을 구하는 문제이다. 사인 합의 부호를 결정하는 것이 미묘한 단계이다.

2 **정오각형.** $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$임을 보이고, 이를 이용하여 자와 컴퍼스로 정오각형을 작도하는 방법을 설명하라.

3 **다른 주기.** $z' = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$임을 수치로 확인하라.

4 **생성원.** 17을 법으로 할 때 3의 거듭제곱은 0이 아닌 모든 나머지를 주지만, 2의 거듭제곱은 그렇지 않음을 보여라. 2의 거듭제곱은 어떤 나머지들을 주는가?

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press). 자와 컴퍼스 작도와 정17각형을 다루는 장이 있다.
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?*** (Oxford University Press). 제3장은 정17각형을 포함하여 작도를 초등적으로 아름답게 설명한다.
- **Daniel Kehlmann, *Measuring the World*** (Quercus). 가우스와 알렉산더 폰 훔볼트(Alexander von Humboldt)에 관한 유쾌한 소설로, 머리를 식히기에 좋다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 6.2절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/gauss-17gon.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com