6.1 근이 모두 단위근인 다항식

학습지

문제

STEP III 2010, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q3

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 모든 n차 단위근은 $z^n = 1$을 만족한다. 그러나 1이 되는 가장 작은 양의 거듭제곱 지수는 n보다 작을 수도 있다. 네 개의 4차 단위근 $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ 각각에 대하여 그 가장 작은 지수는 무엇인가?

1단계 처음 몇 개

다루는 내용: 4제곱근과 소문항 (i)

생각해 보기 4제곱 단위근(roots of unity) $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ 각각에 대하여, 거듭제곱해서 1이 되는 가장 작은 양의 지수는 무엇인가? 이 가운데 원시(primitive) 단위근은 어느 것인가?

잠깐, 직접 해 보기 6제곱 단위근을 거듭제곱해서 1이 되는 가장 작은 지수에 따라 분류해 보자. $n = 3$과 $n = 5$일 때, 원시가 아닌 n제곱근은 어느 것인가? $x^n - 1$을 그에 대응하는 인수로 나누어 보자.

2단계 어떤 n에서 $x^4 + 1$이 나오는가?

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 $x^4 = -1$이면 x^8은 무엇인가? 거듭제곱해서 1이 되는 가장 작은 지수가 8의 약수이면서 $x^4 \neq 1$이라면, 그 지수는 무엇이 될 수 있는가?

3단계 소수

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 p가 소수(prime)이면 p제곱 단위근의 위수(order)는 무엇이 될 수 있는가? $n = 3$과 $n = 5$일 때 한 것을 일반화해 보자.

4단계 어떤 원분다항식도 다른 두 원분다항식의 곱이 아니다

다루는 내용: 소문항 (iv)

> **잠깐, 직접 해 보기** $C_q = C_r C_s$라고 가정하자. C_r의 근 하나를 잡으면, 그 위수는 무엇인가? 한편 이 항등식에 따르면 그 위수는 무엇이어야 하는가? 단위근의 위수는 오직 하나뿐이다.

숨은 수학

$x^n - 1$의 인수분해

모든 n차 단위근은 n의 약수인 어떤 위수 d를 가지며, d차 단위근 가운데 위수가 d인 것은 $d \mid n$일 때 모두 n차 단위근이다. 따라서 $x^n - 1$의 근은 위수에 따라 여러 부류로 나뉘고, 다음을 얻는다.

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} C_d(x).$$

예를 들어 $x^6 - 1 = C_1 C_2 C_3 C_6 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$이다. 그림 6.1.1은 열두 개의 12차 단위근을 이런 방식으로 분류한 것이다. 원시 n차 단위근의 개수, 즉 C_n의 차수는 k 가운데 1과 n 사이에 있으면서 n과 공약수가 없는 것의 개수이며, 이것이 바로 **오일러 피 함수**(*Euler's totient function*) $\varphi(n)$이다. 차수를 비교하면 항등식 $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$을 얻는다.

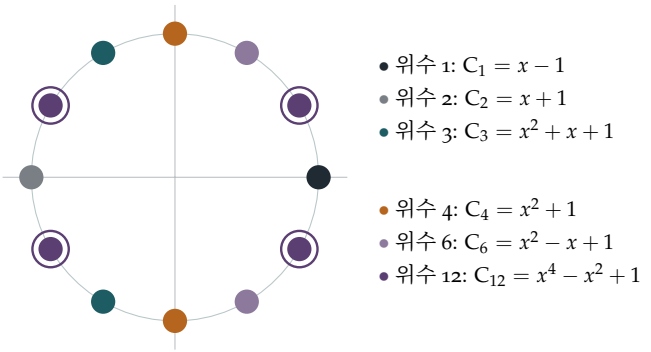

그림 6.1.1 위수에 따라 색칠한 열두 개의 12차 단위근. 네 개의 원시 12차 단위근(고리 표시)은 C_{12}의 근이다. 모든 부류를 합치면 $x^{12} - 1 = C_1C_2C_3C_4C_6C_{12}$이고, 차수는 $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$이다.

정수 계수, 그리고 뜻밖의 사실

정의만 보아서는 분명하지 않지만, 모든 원분다항식의 계수는 **정수**이다. ($x^n - 1$의 인수분해와 수학적 귀납법(induction)을 이용한다. C_n은 $x^n - 1$을 그보다 앞선 원분다항식들의 곱으로 나눈 것이고, 정수 계수 다항식을 최고차항의 계수가 1인(monic) 정수 계수 다항식으로 나누는 다항식의 나눗셈에서는 계수가 계속 정수로 남는다.) 오랫동안 알려진 모든 예는 계수가 $0, 1, -1$뿐이었다. 첫 번째 예외는 1883년 Migotti가 발견한 C_{105}로, 이 다항식에는 $-2x^7$이라는 항이 있다. $105 = 3 \times 5 \times 7$은 서로 다른 홀수 소인수를 세 개 가지는 가장 작은 수이다. 사실 원분다항식의 계수는 원하는 만큼 크게 만들 수 있다.

기약성

소문항 (iv)는 어떤 원분다항식도 다른 두 원분다항식의 곱이 아님을 보여 준다. 실제로는 훨씬 강한 사실이 성립한다. C_n은 유리수 계수를 가진 더 낮은 차수의 다항식들로 전혀 인수분해되지 않는다. 가우스는 소수 n에 대하여 이를 증명했고(이는 대학 첫 대수학 강의에서 배우게 될 **아이젠슈타인 판정법**(*Eisenstein's criterion*)에서 나온다), 크로네커(Kronecker)와 데데킨트(Dedekind)는 일반적인 n에 대하여 증명했다. 이 **기약성**(*irreducibility*) 덕분에 원분다항식은 단위근과 관련된 다항식 가운데 "소수"의 역할을 하며, 이는 단위근에 대한 갈루아(Galois) 이론의 출발점이 된다.

더 도전하기

1 **인수분해 확인하기.** $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^6 - 1$임을 확인하고, $x^{12} - 1$이 그림 6.1.1에서처럼 인수분해됨을 확인하여라.

2 **소수의 두 배.** p가 홀수인 소수이면 $\mathrm{C}_{2p}(x) = \mathrm{C}_p(-x)$임을 보여라. $p = 3$일 때 이를 확인하여라.

3 **오일러 피 함수.** 소수 p에 대하여 $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$이고 $\mathrm{C}_{p^k}(x) = \mathrm{C}_p\left(x^{p^{k-1}}\right)$임을 보여라. 이를 이용하여 C_9를 구하여라.

4 **조금 긴 문제.** 심화 $x^{15} - 1 = \mathrm{C}_1\mathrm{C}_3\mathrm{C}_5\mathrm{C}_{15}$를 이용하여 $\mathrm{C}_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Ian Stewart, *Galois Theory*** (CRC Press). 갈루아 이론에 대한 표준적인 학부 입문서이다. 원분다항식과 정다각형이 앞부분에 나온다.
- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic*** (Cambridge University Press). 단위근과 그 산술을 다룬다.
- **Marcus du Sautoy, *Finding Moonshine*** (Fourth Estate). 대칭과 군론을 다룬 교양서로, 갈루아의 이야기도 담겨 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 6.1절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/cyclotomic.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com