5.8 원판에 숨은 거리

학습지

문제

STEP III 2013, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q6

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $|z-w| \le |z| + |w|$가 그림으로부터 어떻게 나오는가? (z와 $-w$를 벡터로 생각해 보라.)

1단계 절댓값(modulus) 전개하기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $|a|^2 = aa^*$를 이용한다. $|z-w|^2 = (z-w)(z^*-w^*)$를 전개하고 $(|z|+|w|)^2$과 비교한다.

잠깐, 직접 해 보기 E는 왜 실수인가? $E \geq 0$임을 보일 때는 삼각부등식(triangle inequality)을 이용한다.

2단계 두 번째 항등식(identity)

다루는 내용: 소문항 (ii)

? **생각해 보기** $|1 - zw^*|^2$도 같은 방법으로 전개한다.

3단계 부등식

다루는 내용: 마지막 부등식, 그리고 $|z| < 1, |w| < 1$인 경우

생각해 보기 $A = (|z| + |w|)^2$, $B = (1 + |zw|)^2$이라 하자. 소문항 (i)과 (ii)에 의해, 주어진 부등식을 제곱하면 $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$가 된다. 이 부등식은 언제 성립하는가?

잠깐, 직접 해 보기 $1 + |z||w| - |z| - |w|$를 인수분해(factorise)한다. 이 식은 언제 음이 아닌가(non-negative)? 그 조건은 $|z| < 1$이고 $|w| < 1$인 경우도 포함하는가?

숨은 수학

비유클리드 기하학(non-Euclidean geometry)

이천 년 동안 수학자들은 유클리드의 다섯 번째 공준(직선 위에 있지 않은 한 점을 지나 그 직선에 평행한 직선은 정확히 하나 있다)을 그의 다른 공리들로부터 증명하려고 애썼다. 1820년대와 1830년대에 로바첸스키(Nikolai Lobachevsky), 보여이 야노시(János Bolyai), 그리고 (공개하지는 않았지만) 가우스(Gauss)는 그것이 불가능하다는 것을 깨달았다. 평행선이 무한히 많은, 완벽하게 모순 없는 기하학이 존재하는 것이다. 1882년 푸

앵카레(Henri Poincaré)는 단위원판 안에서 이 기하학의 아름다운 모형을 찾아냈다. 점은 열린 원판의 점이고, "직선"은 지름, 그리고 경계원과 직각으로 만나는 원호이며, z와 w 사이의 거리는 다음과 같다.

$$d(z,w) = 2\tanh^{-1}\rho(z,w), \qquad \text{여기서} \qquad \rho(z,w) = \frac{|z-w|}{|1-zw^*|}.$$

점이 경계원에 가까워질수록 중심으로부터의 거리는 무한대로 커진다. 즉 이 원판은 왜곡 렌즈를 통해 바라본, 무한히 펼쳐진 평면 전체이다.

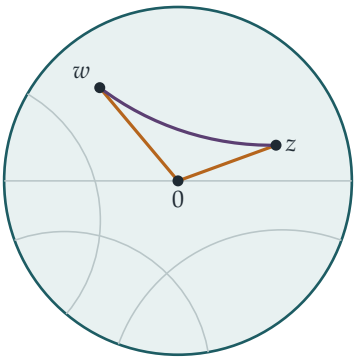

그림 5.8.1 푸앵카레 원판(Poincaré disc). 쌍곡기하학의 "직선"은 지름이거나 경계와 직각으로 만나는 원의 호이다(회색). 꼭짓점이 $0, z, w$인 쌍곡삼각형은 두 변이 지름 위에 있고(호박색) 한 변이 원호 위에 있다(자주색). 문제의 부등식은 쌍곡 거리로 잴 때 자주색 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 길지 않다는 뜻이다.

모습을 감춘 삼각부등식

$|z|, |w| < 1$일 때 이 문제가 증명한 것은 다음과 같다. $|z| = \tanh a$, $|w| = \tanh b$라 하면, 0에서 z와 w까지의 쌍곡 거리는 각각 $2a$와 $2b$이다. 그러면 Section 3.8에서 본 tanh의 덧셈 정리에 의하여

$$\frac{|z|+|w|}{1+|zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1+\tanh a \tanh b} = \tanh(a+b).$$

따라서 부등식은 $\tanh\left(\frac{1}{2}d(z,w)\right) \le \tanh(a+b)$, 즉

$$d(z,w) \le 2a + 2b = d(z,0) + d(0,w).$$

라는 뜻이다. 이것이 쌍곡 거리에 대한 삼각부등식이다(그림 5.8.1). 상대론적 속도 합성 공식과 쌍곡기하학은 사실 같은 것이다. 특수상대성이론에서 가능한 속도 전체의 집합은 알맞은 거리 개념을 주면 그 자체로 쌍곡공간이다. 이 이야기는 Section 7.6에서 다시 다룬다.

원판의 대칭

왜 ρ가 올바른 양일까? $|a| < 1$일 때 사상 $z \mapsto \dfrac{z - a}{1 - a^{*}z}$는 단위원판을 자기 자신으로 보내고, 쌍곡 거리를 보존하며, a를 중심으로 옮긴다. 이 사상들은 평행이동의 쌍곡기하학 버전이고, $\rho(z, w)$는 w를 중심으로 옮겼을 때의 $|$옮겨진$z|$와 정확히 같다. 이러한 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformations*)은 복소해석학(complex analysis)의 핵심 주제이다. 에셔(M. C. Escher)의 *Circle Limit*(원의 극한) 목판화 연작은 수학자 콕서터(H. S. M. Coxeter)의 그림에서 영감을 받은 작품으로, 합동인 물고기와 천사로 푸앵카레 원판을 쪽매맞춤한 모습을 보여 준다. 가장자리로 갈수록 무늬가 작아지는 것은 그곳에서 쌍곡 거리가 한없이 커지기 때문이다.

더 도전하기

1 **수치로 확인하기.** $z = \frac{1}{2}, w = -\frac{1}{2}$로 두고 부등식의 양변을 계산하라. 다음으로 쌍곡 거리 $d(z, 0), d(0, w), d(z, w)$를 계산하고, 이 경우 삼각부등식에서 등호가 성립함을 확인하라. 왜 그런가?

2 **섞인 경우.** 부등식이 성립하지 않는, $|z| < 1 < |w|$인 z, w를 찾아라.

3 **등거리변환(isometry).** $|a| < 1$일 때 $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - a^{*}z}$라 하자. $|z| = 1$이면 $|f(z)| = 1$이고, $f(a) = 0$임을 보여라. 또한 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$임을 보여라.

4 **무한은 가깝다.** 0에서 r까지$(0 < r < 1)$의 쌍곡 거리가 $\ln \frac{1+r}{1-r}$이고, $r \to 1$일 때 이 값이 무한대로 발산함을 보여라. 중심으로부터의 쌍곡 거리가 10이 되려면 점이 경계에 얼마나 가까워야 하는가?

더 읽을거리

- **Caroline Series, “Hyperbolic geometry” 강의 노트** (University of Warwick, 무료 공개). 푸앵카레 원판에서 출발하는 명쾌한 입문 강의이다.
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space*** (Oxford University Press). 유클리드에서 아인슈타인(Einstein)에 이르는 비유클리드 기하학의 역사를 다룬다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 6장에서 비유클리드 기하학과 뫼비우스 변환을 아름다운 그림과 함께 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 5.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/poincare-disc.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com