5.7 사상으로서의 복소 지수함수

학습지

문제

STEP II 1997, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s2-q5

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 $z = e^{u}(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$의 절댓값(modulus)과 편각(argument)을 u와 v로 나타내면 무엇인가?

1단계 $e^w = ie$ 풀기

다루는 내용: $z = ie$일 때 w 구하기

생각해 보기 $z = e^u(\cos v + i \sin v)$의 절댓값(modulus)과 편각(argument)을 u와 v로 나타내면 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 ie의 절댓값과 편각은 무엇인가? 해는 몇 개인가?

2단계 격자선의 상

다루는 내용: 직선 $u = $ 상수와 $v = $ 상수의 상(image)

생각해 보기 직선 $u = c$ 위에서는 무엇이 고정되고 무엇이 변하는가? 직선 $v = d$ 위에서는 어떠한가?

3단계 일대일 조각

다루는 내용: 두 쌍의 부분집합

생각해 보기 어떤 점 w가 제1사분면으로 옮겨지는가? 그 집합이 사분면과 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 이루기에는 너무 큰 이유는 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 $0 < |z| < 1$인 경우: u의 값은 어떤 범위가 필요한가? 모든 편각이 정확히 한 번씩 나와야 하므로, v의 구간의 길이는 얼마여야 하고 어느 끝점을 포함해야 하는가?

숨은 수학

복소로그

실수 직선에서 ln은 exp의 역함수이다. 복소평면에서는 $z \neq 0$인 각 z에 대하여 $e^w = z$의 해 w가 무한히 많고, 이 해들은 2πi의 배수만큼 차이 나므로 "$\log z$"는 하나의 수가 아니다. 진짜 함수를 얻으려면 **분지**(branch)를 골라야 하는데, 이는 W_3이나 W_4 같은 띠를 고른다는 뜻이다. **주분지**(principal branch)는 $-\pi < \arg z \leq \pi$로 잡는다. 모든 분지는 원점에서 뻗은 어떤 반직선을 따라 값이 뛰는데, 이 반직선을 **분지 절단**(branch cut)이라 한다.

리만(Bernhard Riemann)은 1851년 학위 논문에서 로그가 평면 위에 산다는 고집을 버리는 것으로 이 문제를 해결했다. 로그는 무한한 나선 계단, 곧 **리만 곡면**(Riemann surface) 위에 살며, 그 위에서는 일가이고 매끄럽다. 오늘날 리만 곡면은 기하학, 정수론(number theory), 끈 이론(string theory)의 중심에 있다.

각이 보존된다

그림 5.7.1 (온라인 전체 절에 수록)을 다시 보자. 세로 격자선과 가로 격자선은 직각으로 만나고, 이들이 옮겨 간 원과 반직선도 직각으로 만난다. 이는 우연이 아니다. 복소함수는 도함수가 0이 아닌 곳이면 어디서나 곡선 사이의 각을 보존한다. 이런 사상을 **등각**(conformal) 사상이라 한다. 국소적으로 등각 사상은 회전과 확대·축소일 뿐인데, 이는 바로 복소수 $f'(z)$를 곱하는 일이 하는 것이다. 등각 사상은 복잡한 영역을 답이 알려진 단순한 영역으로 변환함으로써 유체 흐름, 정전기학, 열전도 문제를 푸는 데 쓰인다.

메르카토르 지도

이 절과 Section 4.8을 잇는 놀라운 사실이 있다. 1569년 메르카토르(Gerardus Mercator)의 지도는 나침반 방위가 일정한 항로가 직선이 되도록 설계되었는데, 그러려면 각을 보존해야 한다. 지구를 먼저 (북극에서) 평면 위로 입체 사영(stereographic projection)한 다음 복소로그를 취하면, 그 결과가 정확히 메르카토르 도법이다. log 아래에서 반직선과 원이 가로 직선과 세로 직선이 되는 것과 똑같이, 경선은 세로 직선이 되고 위선은 가로 직선이 된다. 이 절의 지수 사상을 거꾸로 돌리면 바로 항해사가 쓰는 해도의 수학이 된다.

더 도전하기

1 **방정식 풀기.** $e^w = -1$을 만족하는 모든 복소수 w와, $e^w = 1 + \mathrm{i}$를 만족하는 모든 w를 구하여라.

2 **정사각형의 상.** 꼭짓점이 $0, 1, 1+\mathrm{i}, \mathrm{i}$인 정사각형의 $z = e^w$에 의한 상을 구하고 그려라.

3 **직각.** 원 $|z| = e^c$와 반직선 $\arg z = d$가 직각으로 만남을 직접 보이고, 이것이 직선 $u = c$와 $v = d$가 수직이라는 사실과 어떻게 맞아떨어지는지 설명하여라.

4 **제곱.** c와 d를 0이 아닌 실수라 하자. 사상 $z \mapsto z^2$에 의한 직선 $x = c$와 $y = d$의 상을 구하여라. 그 상들이 포물선(parabola)이며, 만나는 곳에서는 언제나 직각으로 만남을 보여라. ($c = 0$ 또는 $d = 0$이면 어떻게 되는가?)

더 읽을거리

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*** (Oxford University Press). 제 2장과 제 4장에서 지수함수, 로그, 등각 사상을 훌륭한 그림과 함께 다룬다.
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis*** (Oxford University Press). 명료한 대학 학부 첫 교재이다.
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis*** (Cambridge University Press). 기하학에 중점을 둔 또 하나의 훌륭한 학부 입문서이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 5.7절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/complex-exponential.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com