5.6 페르마 점

학습지

문제

STEP III 2000, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/00-s3-q3

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐**, **직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 A, B, C는 어디에 있는가? 각각의 편각(argument)은 무엇인가? OA, OB, OC가 서로 이루는 각은 얼마인가?

1단계 핵심 항등식

다루는 내용: 항등식

생각해 보기 α^3은 무엇인가? z^3+1을 인수분해(factorise)하고, $\alpha \neq -1$임을 이용한다.

생각해 보기 A, B, C는 어디에 있는가? 각각의 편각(argument)을 구한다.

2단계 회전으로 보는 정삼각형

다루는 내용: 꼭짓점 N, L, M

생각해 보기 삼각형 CAN은 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형(equilateral triangle)이다. C에 서서 볼 때 A에서 N으로 어떻게 가는가? $N-C$를 $A-C$로 나타낸다.

잠깐, 직접 해 보기 시계 방향으로 60° 회전(rotation)하는 것은 $e^{-i\pi/3}$을 곱하는 것이다. 이것을 α로 나타낸 다음, 같은 방법으로 L과 M을 구하고 항등식을 이용해 정리한다.

3단계 원점을 지나는 세 직선

다루는 내용: 세 직선

> **잠깐, 직접 해 보기** L과 C를 비교한다. 둘 다 같은 복소수의 실수배이다. 각 실수배의 부호는 무엇을 알려 주는가? M과 A, N과 B에 대해서도 같은 방법으로 해 본다.

숨은 수학

페르마 점이 거리의 합을 최소로 하는 이유

왜 $PA + PB + PC$는 각 변이 120°의 각으로 보이는 점에서 가장 작아야 할까? 멋진 논증이 하나 있다. 전체 그림을 B를 중심으로 60° 회전시켜 A를 L'(AB 위에 세운 정삼각형의 꼭짓점)으로, P를 P'으로 보낸다. 삼각형 BPP'은 정삼각형이므로 $PB = PP'$이고, $PA = P'L'$이다. 그러면 $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$이고, 이는 L'에서 C로 가는 경로의 길이이다. 이 값은 $|L'C|$ 이상이며, 등호는 경로가 직선일 때, 즉 P에서의 각이 120°일 때 정확히 성립한다. 따라서 총길이의 최솟값은 문제에서 구한 대로 $|LC| = p + q + r$이다. (이 논증은 삼각형의 모든 각이 120°보다 작을 때 성립한다. 그렇지 않으면 최솟값은 둔각인 꼭짓점에서 나온다.)

비누막과 슈타이너 트리

세 개의 말뚝(A, B, C를 나타낸다)이 달린 틀을 비눗물에 담갔다 꺼내면, 비누막은 표면장력(surface tension) 에너지를 최소로 하면서 페르마 점에서 120°로 만나는 세 개의 벽을 이룬다. 점이 더 많을 때 이들을 잇는 가장 짧은 연결망은 **슈타이너 트리**(Steiner tree)로, 세 변이 120°로 만나는 교차점이 추가로 생긴다. 슈타이너 트리를 찾는 일은 일반적으로 계산상 어렵지만(NP-난해(NP-hard) 문제이다), 도로망, 송유관, 컴퓨터 칩의 배선을 설계할 때 실제로 중요하다.

나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)

같은 그림 속에는 또 하나의 보석이 숨어 있다. 임의의 삼각형의 세 변 위에 세운 세 정삼각형의 중심은 정삼각형을 이룬다. 이 정리는 전통적으로 나폴레옹 보나파르트(Napoleon Bonaparte, 열성적인 아마추어 수학자였다)의 업적으로 알려져 있지만, 그가 이것을 발견했다는 증거는 없다. 이 정리 역시 $1 + \alpha^2 = \alpha$를 이용하면 복소수로 짧게 증명할 수 있다.

더 도전하기

1 **이름 붙인 순서 확인하기.** 정삼각형의 꼭짓점을 반시계 방향으로 이름 붙이면(즉 안쪽으로 세우면) 세 직선이 일반적으로 O를 지나지 않음을 보여라.

2 **나폴레옹 정리.** 정삼각형 ABL의 중심이 $\frac{1}{3}(A + B + L)$임을 보여라. 위에서 구한 식들을 이용하여 세 중심이 정삼각형을 이룸을 보여라.

3 **최솟값.** $p = 2, q = 1.4, r = 1.1$일 때, P가 각 꼭짓점에 있을 때와 무게중심(centroid) $\frac{1}{3}(A + B + C)$에 있을 때 $PA + PB + PC$를 계산하고, 모두 4.5보다 큼을 확인하여라.

4 **정삼각형 판정법.** z_1, z_2, z_3이 (어느 방향으로든) 정삼각형을 이루기 위한 필요충분조건(if and only if)이 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$임을 보여라.

더 읽을거리

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***(수학이란 무엇인가) (Oxford University Press). 7장에서 페르마 점, 슈타이너 트리, 비누막을 다룬다.
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***(복소수와 기하학) (Mathematical Association of America). 복소수로 증명한 여러 기하학 정리를 정확히 이 수준에서 다룬다.
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***(시각적 복소해석학) (Oxford University Press). 1장에 나폴레옹 정리와 그 밖의 기하학적 결과가 실려 있다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 5.6절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/fermat-point.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com